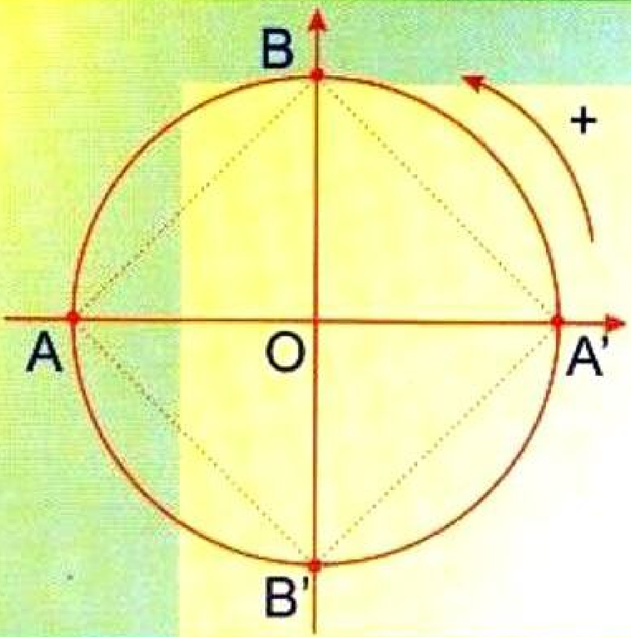
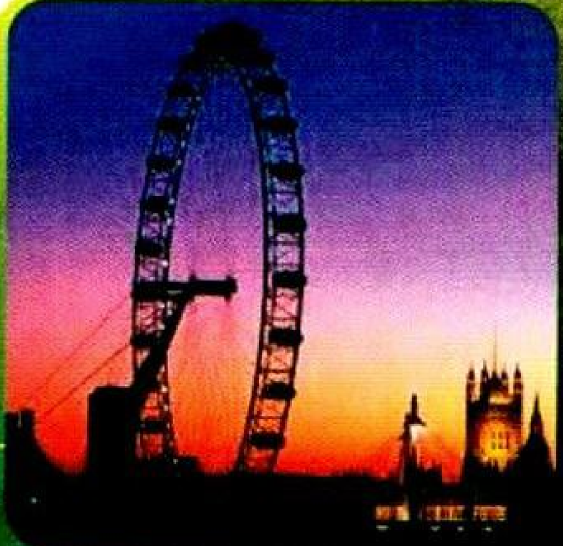
PGS. TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
TRẦN QUANG TÀI - TRỊNH MINH LÂM - LÊ ĐÌNH NGỌC - LÊ THỊ PHƯƠNG

GIẢI BÀI TẬP
ĐẠI SỐ và GIẢI TÍCH
11

(CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO)

(Tái bản lần thứ hai)





NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PGS. TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
TRẦN QUANG TÀI - TRỊNH MINH LÂM - LÊ ĐÌNH NGỌC - LÊ THỊ PHƯƠNG

GIẢI BÀI TẬP

ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

Nâng cao

(Tái bản lần thứ hai)

- Tóm tắt lý thuyết
- Bài tập căn bản trong SGK
- Câu hỏi trắc nghiệm

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

– Cuốn sách **Hướng dẫn giải bài tập Đại số và Giải tích nâng cao** có nội dung tương ứng với sách giáo khoa Đại số và Giải tích 11 nâng cao áp dụng từ năm 2007 – 2008.

– Mỗi mục (§) của chương gồm bốn phần.

I. Tóm tắt lý thuyết

II. Bài tập căn bản

III. Câu hỏi trắc nghiệm

IV. Đáp án

Phần I: Trình bày những vấn đề lý thuyết trọng tâm nhất của sách giáo khoa mà các em cần phải hiểu và nắm vững.

Phần II: Trình bày lời giải chi tiết của các bài tập có trong sách giáo khoa, mỗi bài tập đều nêu đầy đủ các bước lập luận với căn cứ là các định nghĩa, định lý, các tính chất đã học.

Phần III: Trình bày các câu hỏi trắc nghiệm nhằm giúp các em ôn luyện lại kiến thức đã học.

Phần IV: Trình bày đáp án câu hỏi trắc nghiệm có ở phần III.

– Việc sử dụng sách nên thực hiện theo trình tự như sau:

Sau khi học lý thuyết, các em hãy tự mình giải các bài tập có trong sách giáo khoa, nếu gặp khó khăn có thể tham khảo lời giải bài tập trình bày ở phần II, hơn nữa ngay cả khi giải được bài tập của SGK, các em cũng nên so sánh lời giải của mình với lời giải được trình bày trong sách này để hiểu sâu sắc hơn, đầy đủ kiến thức và phương pháp giải toán. Tiếp theo các em nên dành thời gian giải các câu hỏi trắc nghiệm ở phần III để củng cố kiến thức.

Hy vọng cuốn sách sẽ là tài liệu hỗ trợ tích cực giúp các em học tốt Đại số và giải tích 11 nâng cao.

Rất mong các em dùng sách với ý thức tự chủ cao và không dùng sách theo cách chỉ “đọc” các lời giải có sẵn của các bài tập trong SGK.

Các tác giả

CHƯƠNG I: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số y = sinx.

- Tập xác định là $\mathbb{R}$; tập giá trị là $[-1;1]$.
- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì 2π.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$ với $k\in\mathbb{Z}$.
- Có đồ thị là một đường hình sin.

2. Hàm số y = cosx.

- Tập xác định là $\mathbb{R}$; tập giá trị là $[-1;1]$.
- Là hàm số chẵn và tuần hoàn với chu kì 2π.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$ và nghịch biến trên $(k2\pi;\pi+k2\pi)$ với $k\in\mathbb{Z}$.
- Có đồ thị là một đường hình sin.

3. Hàm số y = tanx.

- Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì π.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.
- Đồ thị nhận mỗi đường $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, (k\in\mathbb{Z})$ là một đường tiệm cận.

4. Hàm số y = cotx.

- Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì π.
- Đồng biến trên các khoảng $(k\pi;\pi+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.
- Đồ thị nhận mỗi đường $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ là một đường tiệm cận.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1: Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \sqrt{3 - \sin x}$; b) $y = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$;

c) $y = \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}$; d) $y = \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Giải

a) Điều kiện: $3 - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

b) Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ Tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Điều kiện $\begin{cases} \dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos x} \geq 0 \\ 1 + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -1$

$\Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ Tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Điều kiện: $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x + \dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ Tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 2: Xét tính chẵn, lẻ của mỗi hàm số sau:

a) $y = -2\sin x$; b) $y = 3\sin x - 2$;

c) $y = \sin x - \cos x$; d) $y = \sin x \,.\, \cos^2 x + \tan x$.

Giải

a) Tập xác định là: $D = \mathbb{R}$

Với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ và $-2.\sin(-x) = 2\sin x = -f(x)$ $(f(x) = -2\sin x)$.

Do đó: Hàm số $y = -2\sin x$ là hàm số lẻ.

b) Tập xác định của $f(x) = 3\sin x - 2$ là: $D = \mathbb{R}$

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và ta có: $f(-x) = 3\sin(-x) - 2 = -3\sin x - 2 \neq \pm f(x)$

$\Rightarrow$ $y = 3\sin x - 2$ là hàm số không chẵn cũng không lẻ.

c) Tập xác định của $f(x) = \sin x - \cos x$ là: $D = \mathbb{R}$

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x \neq \pm f(x)$

$\Rightarrow$ $y = \sin x - \cos x$ là hàm số không chẵn cũng không lẻ.

d) Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Tập xác định của $f(x) = \sin x \,.\, \cos^2 x + \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

là tập đối xứng qua O. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

và $f(-x) = \sin(-x).\cos^2(-x) + \tan(-x) = -(\sin x.\cos^2 x + \tan x) = -f(x)$

$\Rightarrow y = \sin x \,.\, \cos^2 x + \tan x$ là hàm số lẻ.

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $y = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 3$; b) $y = \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1$;

c) $y = 4\sin\sqrt{x}$.

Giải

a) Ta có: $-1 \le \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \le 1 \Leftrightarrow 1 \le 2.\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 3 \le 5$

$\Rightarrow$ Max $y = 5$ khi $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Min $y = 1$ khi $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có: $-1 \le \sin(x^2) \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1 \le \sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow$ Max $y = \sqrt{2} - 1$ khi $\sin(x^2) = -1 \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi}, k \in \mathbb{Z}^*$.

Min $y = -1$ khi $\sin(x^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi}, k \in \mathbb{Z}_+$.

c) Đều kiện $x \ge 0$.

Ta có: $-1 \le \sin\sqrt{x} \le 1 \Leftrightarrow -4 \le 4\sin\sqrt{x} \le 4$

$\Rightarrow$ Max $y = 4$ khi $\sin\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in Z_+$

$\Leftrightarrow x = \left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)^2, k \in \mathbb{Z}_+$

Min $y = -4$ khi $\sin\sqrt{x} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z^*_+$.

$\Leftrightarrow x = \left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)^2, k \in \mathbb{Z}^*_+$

Bài 4: Cho các hàm số $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \tan x$ và các khoảng

$$J_1 = \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right), J_2 = \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right), J_3 = \left(\frac{31\pi}{4}; \frac{33\pi}{4}\right), J_4 = \left(-\frac{452\pi}{3}; -\frac{601\pi}{4}\right).$$

Hỏi hàn số nào trong 3 hàm số trên đồng biến trên khoảng J_1? Trên khoảng J_2? trên khoảng J_3? trên khoảng J_4? (Trả lời bằng cách lập bảng)

Giải

f(x) đồng biến trên	g(x) đồng biến trên	h(x) đồng biến trên
J_2 và J_3	J_1 và J_4	J_1, J_2 và J_3

Bài 5: Trong khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào sai? Giải thích vì sao?

a) Trên mỗi khoảng mà hàm số y = sinx đồng biến thì hàm số y = cosx nghịch biến.

b) Trên mỗi khoảng mà hàm số $y = \sin^2 x$ đồng biến thì hàm số $y = \cos^2 x$ nghịch biến.

Giải

a) Khẳng định này sai. Tại vì trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số y = sinx là đồng biến nhưng hàm số y = cosx đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

b) Khẳng định này đúng vì: ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Do vậy, trên mỗi khoảng mà hàm số $y = \sin^2 x$ đồng biến thì dẫn tới hàm số $y = 1 - \sin^2 x$ là nghịch biến hay $y = \cos^2 x$ nghịch biến.

Bài 6: Cho hàm số y = f(x) = 2.sin2x.

a) Chứng minh rằng với số nguyên k tùy ý, luôn có $f(x + k\pi) = f(x)$ với mọi x.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số y = 2.sin2x trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

c) Vẽ đồ thị hàm số y = 2.sin2x.

Giải

a) Ta có: $f(x + k\pi) = 2.\sin 2(x + k\pi) = 2.\sin(2x + k2\pi) = 2\sin 2x$

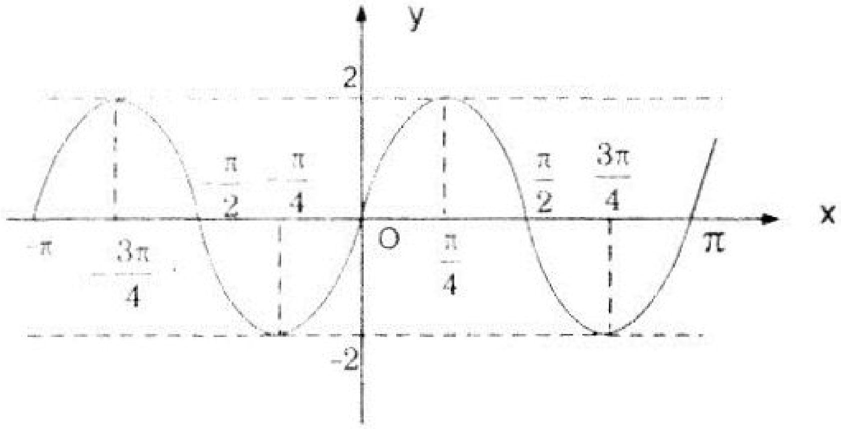
$\Rightarrow f(x + k\pi) = f(x)$, với mọi $x \in R$.

b) Ta có bảng biến thiên của y = 2.sin2x trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
2x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
2.sin2x	0	↘	-2	↗	0	↗	2	↘	0

c) Đồ thị hàm số y = 2.sin2x

c) Đồ thị hàm số $y = 2.\sin 2x$



LUYỆN TẬP

Bài 7: Xét tính chẵn, lẻ của mỗi hàm số sau:

a) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; b) $y = \tan|x|$; c) $y = \tan x - \sin 2x$.

Giải

a) Tập xác định của $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ là $D = \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = \cos\left(-x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq \pm\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = f(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ là hàm số không chẵn cũng không lẻ.

b) Điều kiện: $\cos|x| \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} - k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ là tập xác định của $f(x) = \tan|x|$

Ta có $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = \tan|-x| = \tan|x| = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow y = \tan|x|$ là hàm số chẵn.

c) Tương tự $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ là tập xác định của

$$f(x) = \tan x - \sin 2x$$

Ta có $\begin{cases} x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = \tan(-x) - \sin(-2x) = -(\tan x - \sin 2x) = -f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow y = \tan x - \sin 2x$ là hàm số lẻ.

Bài 8: Cho các hàm số sau:

a) $y = -\sin^2 x$; b) $y = 3\tan^2 x + 1$;

c) $y = \sin x \cdot \cos x$; d) $y = \sin x.\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos 2x$.

Chứng minh rằng mỗi hàm số $y = f(x)$ đó đều có tính chất:
$f(x + kx) = f(x)$, với $k \in Z$, x thuộc tập xác định của hàm số f.

Giải

a) $f(x) = -\sin^2 x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$f(x + k\pi) = -\sin^2(x + k\pi) = -\frac{1 - \cos(2x + k2\pi)}{2} = -\frac{1 - \cos 2x}{2} = -\sin^2 x$$

$\Rightarrow f(x + k\pi) = f(x)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

b) $f(x) = 3\tan^2 x + 1$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$f(x + k\pi) = 3\tan^2(x + k\pi) + 1 = 3\tan^2 x + 1 = f(x)$$

$\Rightarrow f(x + k\pi) = f(x)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

c) Tương tự ta có: $f(x + k\pi) = \sin(x + k\pi).\cos(x + k\pi) = \frac{1}{2}\sin(2x + k2\pi)$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x.\cos x = f(x)$$

$\Rightarrow f(x + k\pi) = f(x)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

d) Tương tự ta có: $f(x + k\pi) = \sin(x + k\pi).\cos(x + k\pi) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2(x + k\pi)$

$$= \frac{1}{2}\sin(2x + k2\pi) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x + k2\pi)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos 2x = \sin x.\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos 2x = f(x)$$

$\Rightarrow f(x + k\pi) = f(x)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Bài 9: Cho hàm số $y = f(x) = A.\sin(\omega x + \alpha)$, ($A$, ω, α là các hằng số khác 0).

Chứng minh rằng mỗi số nguyên k ta có: $f\left(x + k\frac{2\pi}{\omega}\right) = f(x)$,

với mọi x.

Giải

Tập xác định của hàm số $y = A.\sin(\omega x + \alpha)$ là $\mathbb{R}$. Do đó, ta có:

$$f\left(x + k\frac{2\pi}{\omega}\right) = A\sin\left[\omega\left(x + k\frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha\right] = A\sin(\omega x + \alpha + k2\pi)$$

$$= A\sin(\omega x + \alpha)$$

Hay $f\left(x + k\frac{2\pi}{\omega}\right) = f(x)$ với mọi x.

Bài 10: Chứng minh rằng mọi giao điểm của đường thẳng xác định bởi phương trình $y = \frac{x}{3}$ với đồ thị của hàm số y = sinx đều cách gốc tọa độ một khoảng nhỏ hơn $\sqrt{10}$.

Giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ giao điểm, ta có $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{x_0}{3} \\ y_0 = \sin x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3\sin x_0 \\ y_0 = \sin x_0 \end{cases}$$

Ta có: $OM = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{9\sin^2 x_0 + \sin^2 x_0} = \sqrt{10}\left|\sin x_0\right| \le \sqrt{10}$.

Bài 11: Từ đồ thị của hàm số y = sinx hãy suy ra và vẽ các đồ thị của hàm số sau:

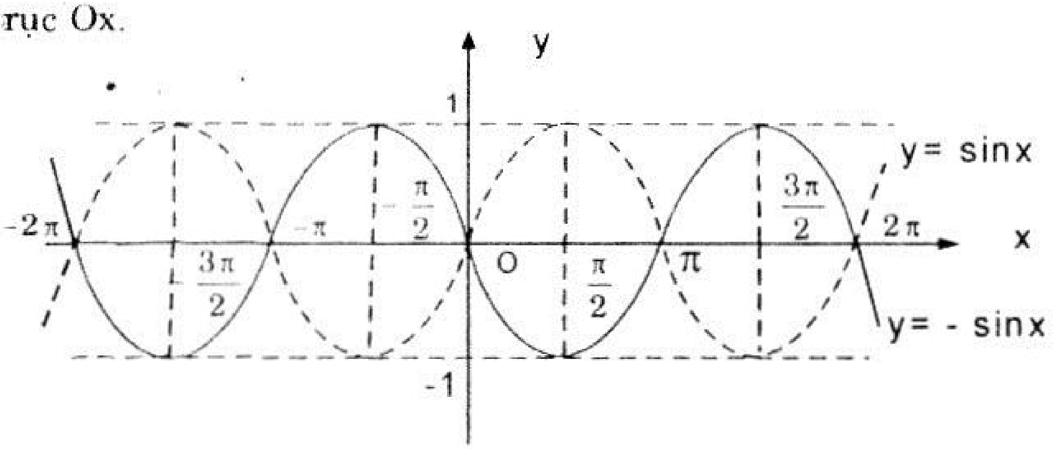
a) $y = -\sin x$; b) $y = \left|\sin x\right|$; c) $y = \sin\left|x\right|$.

Giải

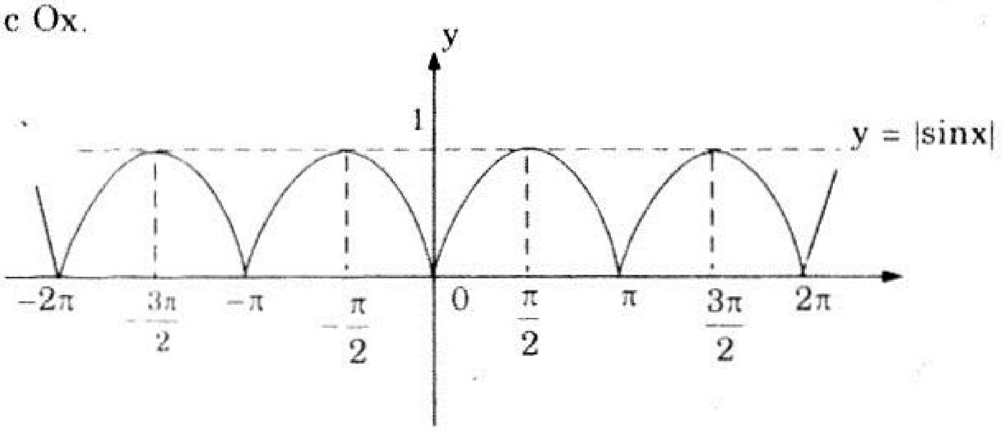
a) Đặt y = f(x) = sinx , y = g(x) = – sinx. Do đó:

$\forall x \in \mathbb{R}$: g(x) = – sinx = – f(x).

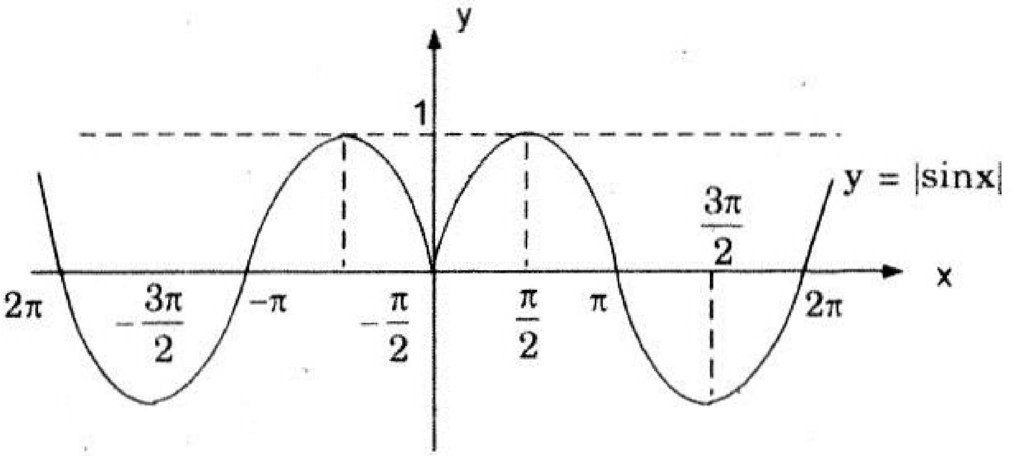
Nên đồ thị của hàm số y = – sinx đối xứng với đồ thị hàm số y = sinx qua trục Ox.



b) Tương tự, đồ thị hàm số $y = \left|\sin x\right|$ gồm phần phía trên trục hoành của đồ thị hàm số y = sinx và lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành qua trục Ox.



c) Tương tự $\sin|-x| = \sin|x|$ nên hàm số $y = \sin|x|$ là hàm số chẵn. Đồ thị gồm: giữ nguyên phần đồ thị bên phải trục tung và lấy đối xứng qua trục tung của đồ thị hàm số y = sinx.



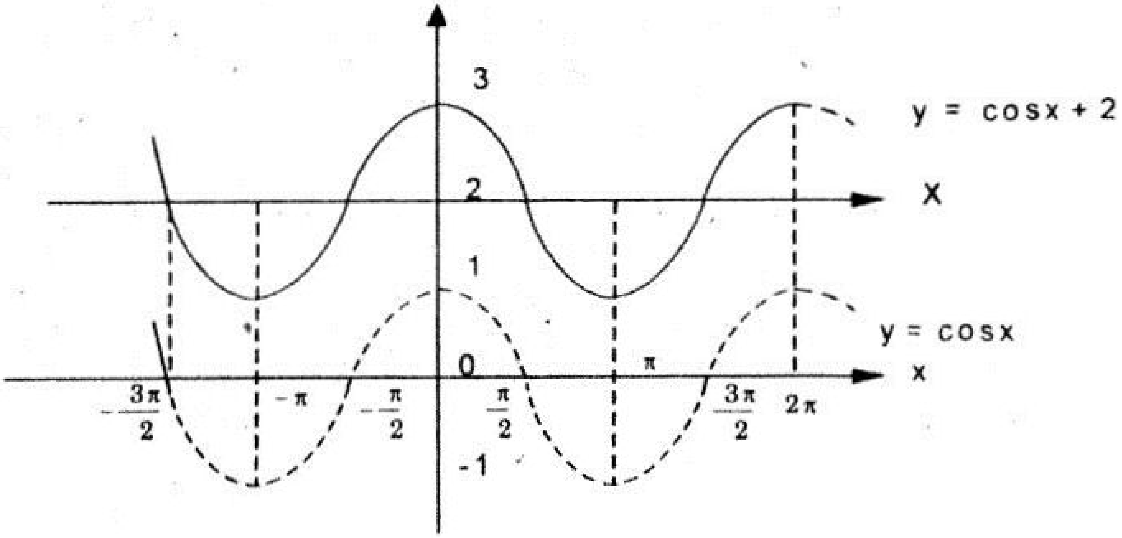
Bài 12: a) Từ đồ thị hàm số y = cosx, hãy suy ra đồ thị các hàm số sau và vẽ đồ thị các hàm số đó:

$$y = \cos x + 2 \quad ; \quad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

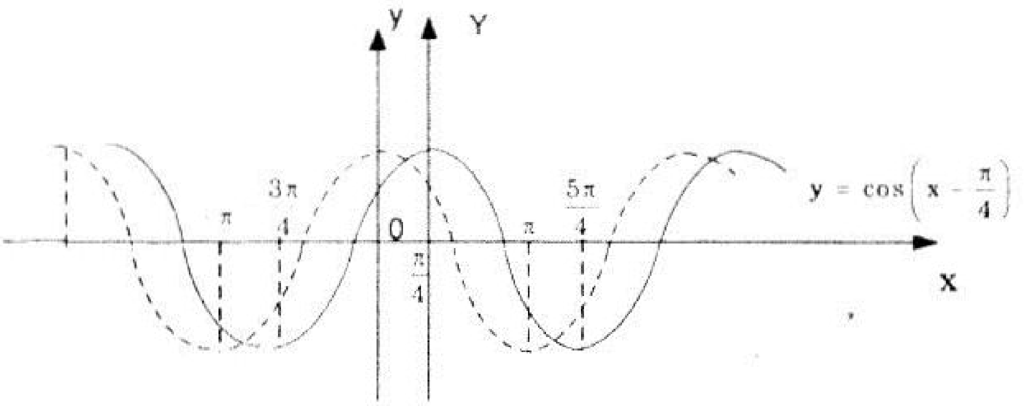
b) Mỗi hàm số đó có phải là hàm số tuần hoàn không?

Giải

a) • Đồ thị hàm số y = cosx + 2 là tịnh tiến của đồ thị y = cosx theo vectơ $\vec{a} = 2\vec{j}$, $\vec{j}$ là vectơ đơn vị của trục tung.



• Đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, là tịnh tiến của đồ thị y = cosx theo vectơ $\vec{b} = \frac{\pi}{4}\vec{i}$, $\vec{i}$ là vectơ đơn vị trên trục Ox.



b) Do hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, nên hàm số $y = \cos x + 2$, $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ cũng tuần hoàn với chu kì 2π.

Bài 13: Cho hàm số $y = f(x) = \cos\frac{x}{2}$.

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên k, $f(x + k4\pi) = f(x)$, với mọi x.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$ trên $[-2\pi; 2\pi]$.

c) Vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$ và $y = \cos\frac{x}{2}$ trên cùng một hệ tọa độ vuông góc Oxy.

d) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét phép biến hình F, biến mỗi điểm $(x; y)$ thành điểm $(x'; y')$ sao cho $x' = 2x$ và $y' = 2y$. Chứng minh rằng F biến đồ thị hàm số $y = \cos x$ thành đồ thị của hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$.

Giải

a) Tập xác định của $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ là $D = \mathbb{R}$.

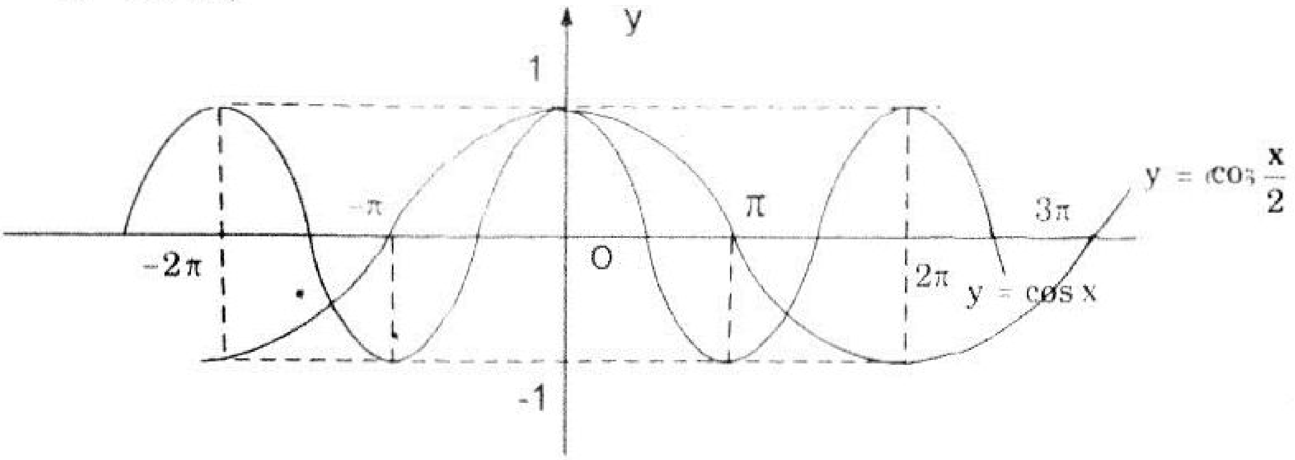
$$\Rightarrow f(x + 4k\pi) = \cos\left(\frac{x + k4\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2} + k2\pi\right) = \cos\frac{x}{2}, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow f(x + 4k\pi) = f(x).$$

b) Bảng biến thiên :

x	-2π		$-\pi$		0		π		2π
$\frac{x}{2}$	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos\frac{x}{2}$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

c) Đồ thị



d) Gọi M(x; y) thuộc đồ thị hàm số y = cosx.

Qua phép biến hình F: M(x; y) biến thành $M'(x'; y')$ nên:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'}{2} \\ y = y' \end{cases}$$, thay vào y = cosx ta được: $y' = \cos\frac{x'}{2}$

$\Leftrightarrow M'\left(x';y'\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$.

Vậy mỗi M(x; y) thuộc đồ thị hàm số y = cosx, thì qua F biến thành $M'(x'; y')$ thuộc đồ thị hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$.

Hay F biến đồ thị hàm số y = cosx thành đồ thị hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 - \cos x} + 2\tan x$ là:

(A) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$; (B) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

(C) $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; (D) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 2: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ là:

(A) –2 ; (B) 3 ; (C) 4 ; (D) 5.

Câu 3: Hàm số y = sin2x đồng biến trên:

(A) $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; (B) $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$; (C) $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$; (D) $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 4: Hàm số y = cos2x là:

(A) Hàm số lẻ ; (B) Hàm số chẵn ;

(C) Hàm số tuần hoàn với chu kì $\frac{\pi}{2}$; (D) Hàm số không tuần hoàn

Câu 5: Cho $y = f(x) = 2\sin\dfrac{x}{2}$ với mọi số nguyên k và $x \in \mathbb{R}$ thì:

(A) $f\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right) = f(x)$; (B) $f(x + k\pi) = f(x)$;

(C) $f\left(x + \dfrac{k3\pi}{2}\right) = f(x)$; (D) $f(x + k4\pi) = f(x)$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(C)	(B)	(B)	(D)

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình sinx = m.

- $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.
- $|m| \le 1$ và α là một nghiệm thì phương trình có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

- Đặt biệt: +) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

  +) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

  +) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- sinx = m có đúng một nghiệm trên $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ thì ta kí hiệu là: arcsin m (đọc là ác – sinm). Khi đó:

$$\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

2. Phương trình cosx = m.

- Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $|m| \le 1$, phương trình có nghiệm, gọi α là một nghiệm thì :

$\cos x = m \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- cosx = m có đúng một nghiệm trên $[0; \pi]$ thì:

$\cos x = m \Leftrightarrow x = \pm\arccos m + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. Phương trình tanx = m.

- α là một nghiệm thì: $\tan x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- $\tan x = m$ có đúng một nghiệm trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì:

$$\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4. Phương trình $\cot x = m$.

- α là một nghiệm thì: $\cot x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cot x = m$ có đúng một nghiệm trên $(0;\pi)$ thì:

$$\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 14: Giải các phương trình sau:

a) $\sin 4x = \sin\frac{\pi}{5}$; b) $\sin\left(\frac{x+\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$;

c) $\cos\frac{x}{2} = \cos\sqrt{2}$; d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = \frac{2}{5}$.

Giải

a) $$\sin 4x = \sin\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &4x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ &4x = \pi - \frac{\pi}{5} + k2\pi \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{2} \\ &x = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{2} \end{aligned}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b) $$\sin\left(\frac{x+\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x+\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\frac{x+\pi}{5} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ &\frac{x+\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{aligned}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = -\frac{11\pi}{6} + 10k\pi \\ &x = \frac{29\pi}{6} + k10\pi \end{aligned}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

c) $$\cos\frac{x}{2} = \cos\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm\sqrt{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

d) $$\cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = \frac{2}{5},\ \left(\text{do}\left|\frac{2}{5}\right| < 1\right) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{18} = \pm\arccos\left(\frac{2}{5}\right) + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{18} \pm \arccos\left(\frac{2}{5}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 15: a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$ rồi chỉ ra trên đồ thị đó những điểm có hoành độ thuộc khoảng $(-\pi;4\pi)$ là nghiệm của phương trình:

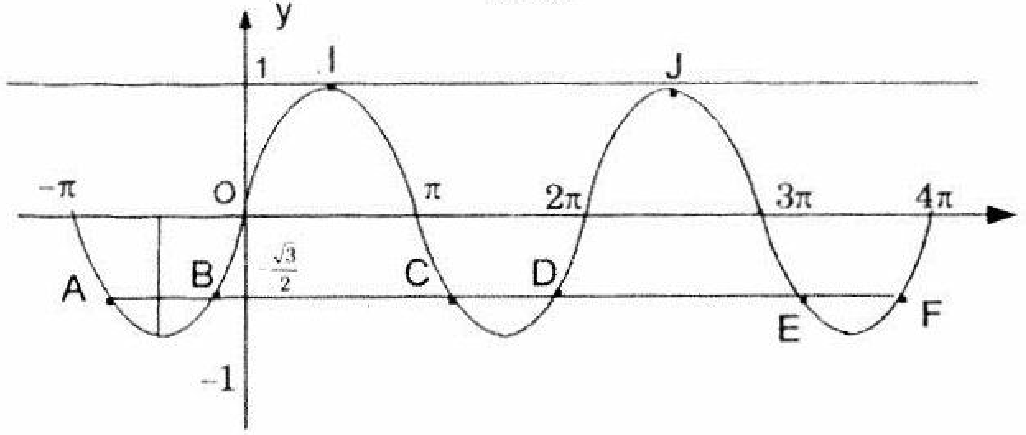
1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = 1$;

b) Cùng câu hỏi tương tự cho hàm số $y = \cos x$ đối với các phương trình:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = -1$.

Giải

a)



Ở hìm trên là đồ thị của hàm số $y = \sin x$, cùng hai đường thẳng $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; $y = 1$

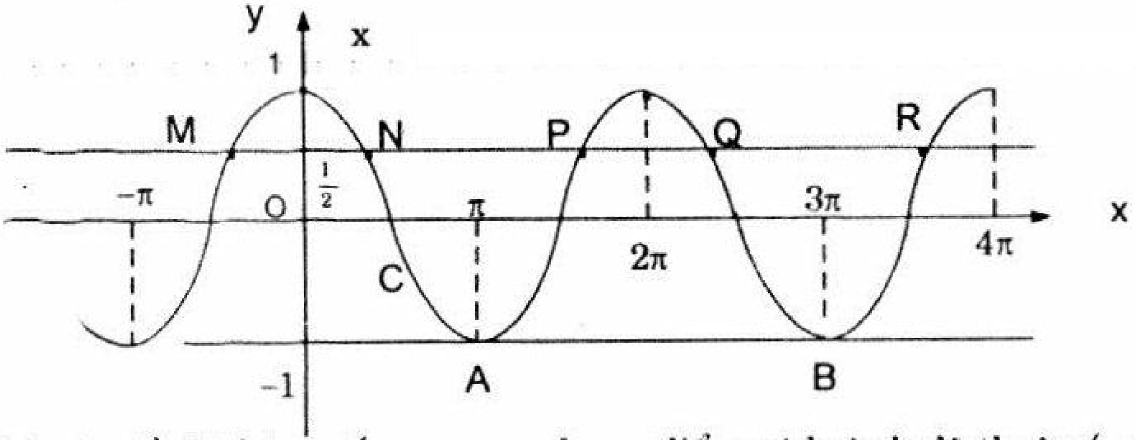
Để chỉ ra được: $I\left(\frac{\pi}{2};1\right)$; $J\left(\frac{5\pi}{2};1\right)$; $A\left(-\frac{2\pi}{3};\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$; $B\left(-\frac{\pi}{3};\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ $C\left(\frac{4\pi}{3};\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$; $D\left(\frac{5\pi}{3};\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$; $E\left(\frac{10\pi}{3};\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$; $F\left(\frac{11\pi}{3};\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

Dựa vào đồ thị trên thì những điểm có hoành độ thuộc $(-\pi;4\pi)$ là nghiệm của:

1) $snx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ là A, B, C, D, E, F.

2) $snx = 1$ là I, J.

b) Đồthị hàm số $y = \cos x$.



Dựa vio đồ thị hàm số $y = \cos x$, những điểm có hoành độ thuộc $(-\pi;4\pi)$ là nghiệm của phương trình:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$ là: M, N, P, Q, R với

$M\left(-\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}\right)$; $N\left(-\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}\right)$; $P\left(\frac{5\pi}{3};\frac{1}{2}\right)$; $Q\left(\frac{7\pi}{3};\frac{1}{2}\right)$; $R\left(\frac{11\pi}{3};\frac{1}{2}\right)$

2) $\cos x = -1$ là: A, B với $A(\pi;-1)$; $B(3\pi;-1)$

Bài 16: Tìm nghiệm của phương trình trong các khoảng đã cho:

a) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ với $0 < x < \pi$; b) $\cos(x-5) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-\pi < x < \pi$.

Giải

a) $\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \text{ do } x \in (0;\pi) \text{ nên } k = 0,\ k = 1.$$

Vậy, nghiệm cần tìm là $x = \frac{11\pi}{12}$; $x = \frac{7\pi}{12}$.

b) $\cos(x-5) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(x-5) = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x - 5 = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in Z$

$$\Leftrightarrow x = 5 \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ do } -\pi < x < \pi \text{ nên } k = -1, k = 1.$$

Vậy, nghiệm cần tìm là $x = 5 - \frac{11\pi}{6}$, $x = 5 - \frac{13\pi}{6}$.

Bài 17: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40^0 bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số :

$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12, t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \le 365$.

a) Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Giải

a) Theo bài ra ta có: $d(t) = 12 \Leftrightarrow 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 = 12$

$\Leftrightarrow \sin\left[\dfrac{\pi}{182}(t-80)\right] = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{182}(t-80) = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 80 + 182k, k \in \mathbb{Z}$.

Do $0 < t \le 365 \Leftrightarrow 0 < 80 + 182k \le 365, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = 0, k = 1$.

Với $k = 0 \Rightarrow t = 80$; Với $k = 1 \Rightarrow t = 262$.

Thành phố A có đúng 12 giờ ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 80 và vào ngày thứ 262.

b) Ta có $d(t) = 3\sin\left[\dfrac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \ge 9$

Vì vậy, thành phố A có ít giờ có ánh sáng khi d(t) = 9

$\Leftrightarrow \sin\left[\dfrac{\pi}{182}(t-80)\right] = -1$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{\pi}{82}(t-80)\right] = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = -11 + 364k, k \in \mathbb{Z}$.

Do $0 < t \le 365 \Leftrightarrow 0 < -11 + 364k \le 365, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = 1, t = 353$.

Ngày có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất là ngày thứ 353.

c) Tương tự $d(t) = 3\sin\left[\dfrac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \le 15$

Vì vậy, thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng khi d(t) = 15

$\Rightarrow \sin\left[\dfrac{\pi}{82}(t-80)\right] = 1$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{\pi}{82}(t-80)\right] = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 171 + 362k, k \in \mathbb{Z}$.

Do $0 < t \le 365 \Leftrightarrow 0 < 171 + 362k \le 365, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = 0, t = 171$.

Vậy ngày có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời là ngày thứ 171.

Bài 18: Giải các phương trình sau:

a) $\tan 3x = \tan\dfrac{3\pi}{5}$; b) $\tan(x - 15^0) = 5$;

c) $\tan(2x - 1) = \sqrt{3}$; d) $\cot 2x = \cot\left(-\dfrac{1}{3}\right)$;

e) $\cot\left(\dfrac{x}{4} + 20^0\right) = -\sqrt{3}$; f) $\cot 3x = \tan\dfrac{2\pi}{5}$.

Giải

a) $\tan 3x = \tan\dfrac{3\pi}{5} \Leftrightarrow 3x = \dfrac{3\pi}{5} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\tan(x - 15^0) = 5 \Leftrightarrow x - 15^0 = \arctan 5 + k180^0$

$\Leftrightarrow x = 15^0 + \arctan 5 + k180^0, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\tan(2x - 1) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(2x-1) = \tan\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

d) $\cot 2x = \cot\left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

e) $\cot\left(\frac{x}{4} + 20^0\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(\frac{x}{4} + 20^0\right) = \cot\left(-30^0\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{4} + 20^0 = -30^0 + k180^0 \Leftrightarrow x = -200^0 + k720^0, k \in \mathbb{Z}.$$

f) $\cot 3x = \tan\frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow \cot 3x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \cot\frac{\pi}{10} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{10} + k\pi$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{30} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 19: a) Vẽ đồ thị hàm số y = tanx, rồi chỉ ra trên đồ thị đó các điểm có hoành độ thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ là nghiệm của mỗi phương trình sau:

1) $\tan x = -1$; 2) $\tan x = 0$.

b) Câu hỏi tương tự cho hàm số y = cotx cho mỗi phương trình sau:

1) $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\cot x = 1$.

Giải

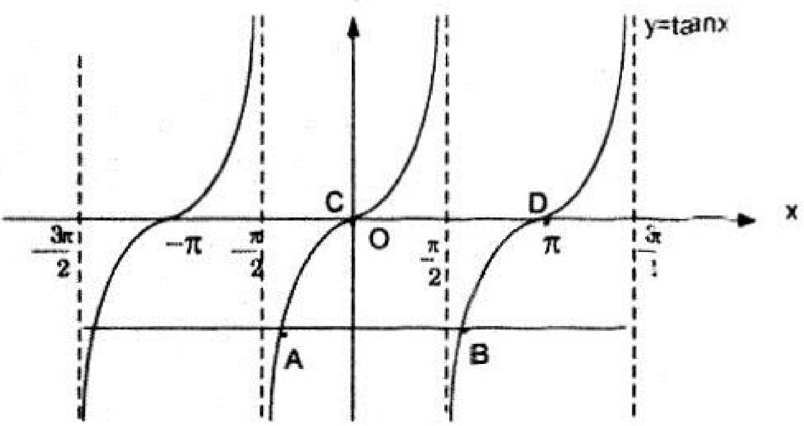
a) Đồ thị hàm số y = tanx. Điểm có hoành độ thuộc $(-\pi; \pi)$ và là nghiệm của phương trình:

1) $\tan x = -1$ là A, B.

2) $\tan x = 0$ là C, D.

Với $A\left(-\frac{\pi}{4}; -1\right)$; $B\left(\frac{3\pi}{4}; -1\right)$

C(0; 0); D(π; 0).



b) Đồ thị hàm số y = cotx. Điểm có hoành độ thuộc $(-\pi; \pi)$ và là nghiệm của phương trình:

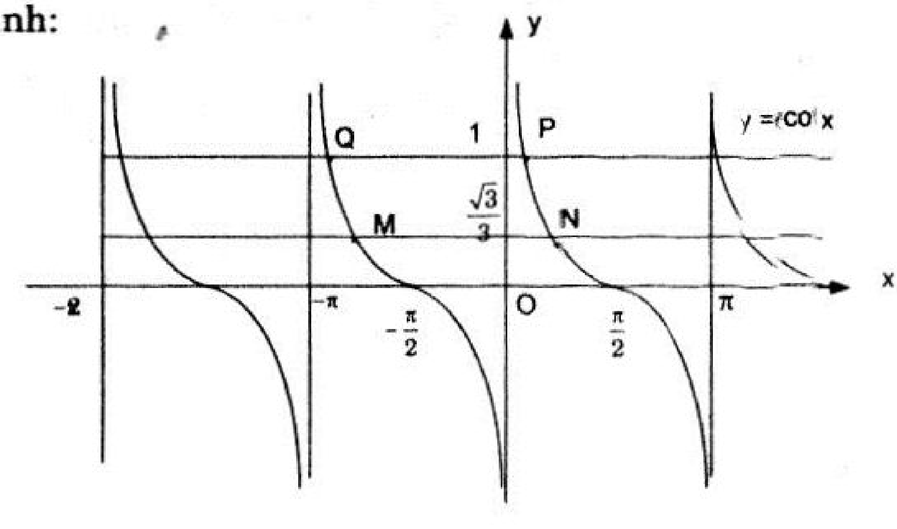
1) $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ là M, N.

2) cotx = 1 là P, Q.

Với $M\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

$N\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $P\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$;

$Q\left(-\frac{3\pi}{4}; 1\right)$



Bài 20: Tìm nghiệm của các phương trình sau trên khoảng đã cho:

a) $\tan(2x - 15^0) = 1$ với $-180^0 < x < 90^0$;

b) $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ với $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

Giải

a) $\tan(2x - 15^0) = 1 \Leftrightarrow \tan\left(2x - 15^0\right) = \tan 45^0 \Leftrightarrow 2x - 15^0 = 45^0 + k180^0$

$$\Leftrightarrow x = 30^0 + k90^0, k \in \mathbb{Z}.$$

Do $-180^0 < 30^0 + k90^0 < 90^0$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = -2$, $k = -1$, $k = 0$.

Vậy nghiệm cần tìm là $x = -150^0$, $x = -60^0$, $x = 30^0$.

b) $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot 3x = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Do $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} < 0, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = -1, k = 0.$

Vậy nghiệm cần tìm là $x = -\frac{\pi}{9}, x = -\frac{4\pi}{9}$.

Bài 21: Khi giải phương trình $\tan x = -\sqrt{3}$, bạn Phương nhận thấy $-\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ và viết : $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Cũng phương trình đó, bạn Quyên lấy $-\sqrt{3} = \tan\frac{2\pi}{3}$, nên giải như sau:

$\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$. Theo bạn ai giải đúng, ai giải sai?

Giải

Cả hai bạn đều giải đúng. Các cung lượng giác $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ có điểm cuối trùng nhau trên đường tròn lượng giác.

Bài 22: Tính các góc của tam giác ABC, biết $AB = \sqrt{2}$ cm, $AC = \sqrt{3}$ cm và đường cao AH = 1 cm.

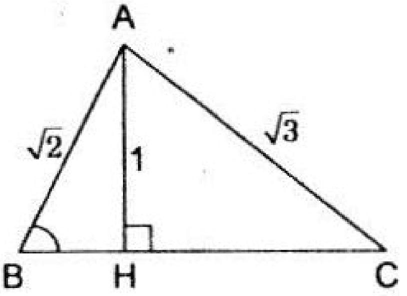
Giải

* Trường hợp 1: B, C nằm khác phía đối với H.

Ta có $\sin\hat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^0$

$\Leftrightarrow \hat{B} = 45^0$.

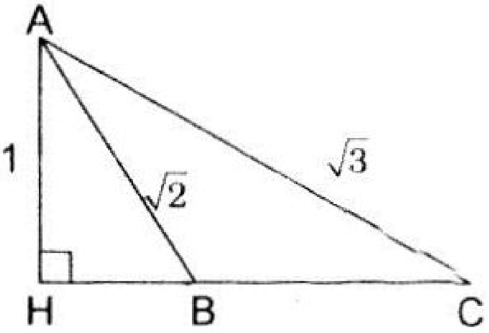
$\sin\hat{C} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



$\Leftrightarrow \widehat{C} = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \widehat{C} = 35^0 15'52''$

$\Rightarrow \widehat{A} = 180^0 - (\widehat{B} + \widehat{C}) \approx 99^0 44'8''$.

* Trường hợp 2: B, C nằm cùng phía đối với H.



$\sin\widehat{B} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sin 135^0$

$\Leftrightarrow \widehat{B} = 135^0$ (do B là góc tù).

$\sin\widehat{C} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \widehat{C} = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 35^0 15'52''$

$\Rightarrow \widehat{A} = 180^0 - (\widehat{B} + \widehat{C}) \approx 9^0 44'8''$.

Vậy tam giác ABC có các góc $\widehat{A} \approx 99^0 44'8''$, $\widehat{B} = 45^0$, $\widehat{C} = 35^0 15'52''$ hoặc $\widehat{A} \approx 9^0 44'8''$, $\widehat{B} = 135^0$ và $\widehat{C} = 35^0 15'52''$.

LUYỆN TẬP

Bài 23: Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1 - \cos x}{2\sin x + \sqrt{2}}$; b) $y = \dfrac{\sin(x-2)}{\cos 2x - \cos x}$;

c) $y = \dfrac{\tan x}{1 + \tan x}$; d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}\cot 2x + 1}$.

Giải

a) Điều kiện: $2\sin x + \sqrt{2} \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x \neq \dfrac{5\pi}{4} + l2\pi \end{cases} ; l, k \in \mathbb{Z}.$$

$\Rightarrow$ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, \dfrac{5\pi}{4} + \ell 2\pi, k, \ell \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Điều kiện: $\cos 2x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \cos x \Leftrightarrow 2x \neq \pm x + k2\pi$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k2\pi \\ x \neq \dfrac{l2\pi}{3} \end{cases} ; l, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) Điều kiện: $\begin{cases} 1 + \tan x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \neq -1 \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} ; l, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \ell\pi, \ell \in \mathbb{Z} \right\} \right)$.

d) Điều kiện: $\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \sqrt{3} \cot 2x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq k\pi \\ \cot 2x \neq -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{2} \\ 2x \neq -\dfrac{\pi}{3} + l\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\ell\pi}{2} \end{cases}, k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\ell\pi}{2}, \ell \in \mathbb{Z} \right\} \right)$.

Bài 24: Giả sử một con tàu vũ trụ được phóng lên từ mũi Ca–na–vơ–ran (Canaveral) ở Mĩ. Nó chuyển động theo một quỹ đạo được mô tả trên một bản đồ phẳng (quanh xích đạo) của mặt đất như hình 1.23 (SGK): điểm M mô tả cho con tàu, đường thẳng △ mô tả cho đường xích đạo. Khoảng cách h (kilômet) từ M đến △ được tính theo công thức $h = |d|$, trong đó $d = 4000 \cos\left[\dfrac{\pi}{45}(t - 10)\right]$, với t (phút) là thời gian trôi qua kể từ khi con tàu đi vào quỹ đạo, $d > 0$ nếu M ở phía trên △, $d < 0$ nếu M ở phía dưới △.

a) Giả thiết rằng con tàu đi vào quỹ đạo ngay từ khi phóng lên tại mũi Ca – na – vơ – ran (tức là ứng với $t = 0$). Hãy tính khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng △, trong đó điểm C là điểm trên bản đồ biểu diễn cho mũi Ca – na – vơ – ran.

b) Tìm thời điểm sớm nhất sau khi con tàu đi vào quỹ đạo để có $d = 2000$.

c) Tìm thời điểm sớm nhất sau khi con tàu đi vào quỹ đạo để có $d = -1236$. (Tính chính xác các kết quả đến hàng phần nghìn).

Hướng dẫn giải

a) Tại mũi Ca – na – vơ – ran là lúc tàu bắt đầu phóng nên $t = 0$. Nên khoảng cách từ C đến △ là:

$$h = |d| = 4000.\left|\cos\left[\frac{\pi}{45}(-10)\right]\right| = 4000.\cos\frac{2\pi}{9} \approx 3064,178(\text{km}).$$

b) Con tàu đi vào quỹ đạo có $d = 2000$

$$\Leftrightarrow 4000.\cos\left[\frac{\pi}{45}(t-10)\right] = 2000 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{45}(t-10) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{45}(t-10) = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{\pi}{45}(t-10) = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 25 + k90^\circ \\ t = -5 + k90^\circ \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

$\Rightarrow$ t = 25 phút, (với k = 0) là thời điểm sớm nhất.

c) Tương tự câu b): $4000.\cos\left[\frac{\pi}{45}(t-10)\right] = -1236$

$$\Leftrightarrow \cos\left[\frac{\pi}{45}(t-10)\right] = -0,309$$

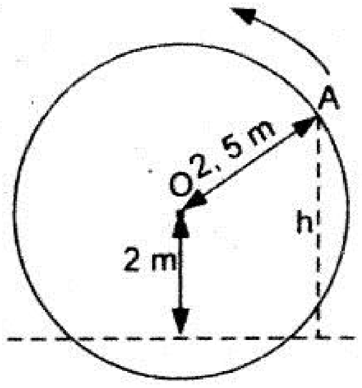
Từ đó suy ra thời điểm sớm nhất là t = 37 (phút).

Bài 25: Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5m ; trục của nó đặt cách mặt nước 2m (h. 1.24). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) từ một chiếc gầu gắn tại điểm A của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = 2 + 2,5\sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right]$, với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút ; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở bên trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới nước (xem bài đọc thêm về dao động đều hòa trang 15(SGK)). Hỏi:

a) Khi nào thì chiếc gầu ở vị trí thấp nhất ?

b) Khi nào thì chiếc gầu ở vị trí cao nhất ?

c) Chiếc gầu cách mặt nước 2m lần đầu tiên khi nào ?



Hình 1.24

Hướng dẫn giải

a) Gầu ở vị trí thấp nhất khi và chỉ khi $2 + 2,5\sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right] = -0,5$.

$$\Leftrightarrow \sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right] = -1 \Leftrightarrow 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = k, k \in \mathbb{Z}.$$

Thời điểm gầu ở vị trí thấp nhất là: 0 phút, 1 phút, 2 phút, 3 phút,......

b) Tương tự $2+2,5\sin\left[2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]=2+2,5$

$$\Leftrightarrow \sin\left[2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]=1 \Leftrightarrow 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}+k, k\in\mathbb{Z}.$$

Thờ điểm gầu ở vị trí cao nhất là: 0,5 phút; 1,5 phút; 2,5 phút;.......

c) $2+2,5\sin\left[2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]=2 \Leftrightarrow \sin\left[2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]=0$

$$\Leftrightarrow 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}+\frac{k}{2}, k\in\mathbb{Z}.$$

Thờ điểm gầu ở cách mặt nước 2m lần đầu tiên là $\frac{1}{4}$ phút.

Bài 26: Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, giải các phương trình sau:

a) $\cos3x=\sin2x$; b) $\sin(x-120^0)-\cos2x=0$.

Giải

a) $\cos3x=\sin2x \Leftrightarrow \cos3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) \Leftrightarrow \cos3x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=0$

$$\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=k\pi\\ \frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}=k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

b) $\sin(x-120^0)-\cos2x=0 \Leftrightarrow \sin\left(x-120^0\right)-\sin\left(90^0-2x\right)=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{-x-30^0}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-210^0}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{x+30^0}{2}\sin\frac{3x-210^0}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{x+30^0}{2}=0\\ \sin\frac{3x-210^0}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x+30^0}{2}=90^0+k180^0\\ \frac{3x-210^0}{2}=\ell180^0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-150^0+k360^0\\ x=70^0+\ell120^0\end{array}\right., k,\ell\in\mathbb{Z}.$$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: $\left.x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ là tập nghiệm của phương trình nào sau đây?

(A) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; (B) $\tan x = 1$; (C) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; (D) $\cot x = \sqrt{3}$.

Câu 2: Phương trình $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan 3x$ có các nghiệm là:

(A) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; (B) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

(C) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; (D) $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3: Nghiệm của phương trình $\cos(3x + \pi) = 1$ trên khoảng $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$ là:

(A) $-\frac{\pi}{6}$; (B) $-\frac{\pi}{3}$; (C) $\frac{\pi}{4}$; (D) $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 4: Nghiệm của phương trình: $\sin 3x - \cos x = 0$ là:

(A) $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$; (B) $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$;

(C) $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$; (D) $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$.

Câu 5: Nghiệm của phương trình $\sin(\pi \cos x) = 1$ là:

(A) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; (B) $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

(C) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; (D) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(D)	(B)	(B)	(C)

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình bậc nhất, bậc hai đối với hàm số lượng giác.

– Dạng: • $at + b = 0$ $(a \neq 0)$.

• $at^2 + bt + c = 0$ $(a \neq 0)$. Với t là một trong bốn hàm số lượng giác.

– Cách giải: Đưa về phương trình bậc nhất, bậc hai đối với ẩn t và giải tìm t.

2. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx.

– Dạng: $a\sin x + b\cos x = c$, $\left(a^2 + b^2 \neq 0\right)$.

– Cách giải: $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x\right)$

Do $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$ nên tồn tại $\alpha : \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Do vậy:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\sin x.\cos\alpha + \sin\alpha.\cos x\right) = \sqrt{a^2 + b^2}.\sin\left(x + \alpha\right)$$

Vì thế: $a\sin x + b\cos x = c \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

3. Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx.

– Dạng: $a.\sin^2 x + b.\sin x.\cos x + c.\cos^2 x = 0$. $\left(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\right)$

– Cách giải: Chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ (điều kiện $\cos x \neq 0$), đưa về phương trình bậc hai đối với tanx. Hoặc chia cả hai vế cho $\sin^2 x$ (điều kiện $\sin x \neq 0$), đưa về phương trình bậc hai đối với cotx.

4. Chú ý: Ngoài ra còn sử dụng các công thức lượng giác, để biến đổi và giải phương trình.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 27: Giải các phương trình sau:

a) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$; b) $\sqrt{3}\tan 3x - 3 = 0$;

c) $(\sin x + 1)\left(2\cos 2x - \sqrt{2}\right) = 0$.

Giải

a) $2\cos x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

b) $\sqrt{3}\tan 3x-3=0 \Leftrightarrow \tan 3x=\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan 3x=\tan\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{3}+k\pi$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}.$$

c) $(\sin x+1)\left(2\cos 2x-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+1=0\\ 2\cos 2x-\sqrt{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ \cos 2x=\cos\frac{\pi}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ 2x=\pm\frac{\pi}{4}+l2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\frac{\pi}{8}+l\pi, l\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Bài 28: Giải các phương trình sau:

a) $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$; b) $\cos^2 x+\sin x+1=0$;

c) $\sqrt{3}\tan^2 x-\left(1+\sqrt{3}\right)\tan x+1=0$.

Giải

a) **Đặt t = cosx,** $|t|\le 1$, ta được phương trình: $2t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

$$2\cos^2 x-3\cos x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

b) $\cos^2 x+\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin^2 x-\sin x-2=0$

Đặt t = sinx, $|t|\le 1$, ta được phương trình: $t^2-t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=2>1 (loại)\end{array}\right.$

$$\Rightarrow \cos^2 x+\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

c) **Đặt t = tanx,** ta được phương trình: $\sqrt{3}t^2-\left(1+\sqrt{3}\right)t+1=0$ có hai nghiệm $t_1=1$, $t_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Do đó, phương trình đã cho được viết lại về dạng tương đương

$$\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\tan\frac{\pi}{4}\\ \tan x=\tan\frac{\pi}{6}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Bài 29: Giải các phương trình sau trên khoảng đã cho rồi dùng bảng số hoặc máy tính bỏ túi để tính nghiệm gần đúng của chúng (chính xác đến hàng phần trăm).

a) $3\cos 2x + 10\sin x + 1 = 0$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

b) $4\cos 2x + 3 = 0$ trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\cot^2 x - 3\cot x - 10 = 0$ trên $(0;\pi)$;

d) $5 - 3\tan 3x = 0$ trên $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$.

Giải

a) $3\cos 2x + 10\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$

Đặt t = sinx, $|t| \le 1$, ta được phương trình: $3t^2 - 5t - 2 = 0$ có hai nghiệm $t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = 2 > 1$ nên t_2 loại. Do đó:

$$3\cos 2x + 10\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Do $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ nên $x = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) \approx -0,34$

b) $4\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 2x = \pm\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + k2\pi$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Do $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên $x = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) \approx 1,21$.

c) Tương tự $\cot^2 x - 3\cot x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot x = -2 \\ \cot x = 5 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = arc\cot(-2) + k\pi \\ x = arc\cot(5) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Do $x \in (0;\pi)$ *nên* $\left[\begin{array}{l} x = arc\cot(-2) + \pi \approx 2,68 \\ x = arc\cot(5) \approx 0,20 \end{array}\right.$.

d) $5 - 3\tan 3x = 0 \Leftrightarrow \tan 3x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\arctan\frac{5}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

Do $x \in \left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{3}\arctan\frac{5}{3} \approx 0,34$ (ứng với k = 0).

Bài 30: Giải các phương trình:

a) $3\cos x + 4\sin x = -5$; b) $2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2}$;

c) $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13$.

Giải

a) $3\cos x + 4\sin x = -5 \Leftrightarrow \frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x = -1$

$\Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = -1$ (với $\frac{3}{5} = \cos\alpha$, $\frac{4}{5} = \sin\alpha$)

$\Leftrightarrow x - \alpha = \pi + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \alpha + \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ với $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

b) $2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \\ x = \frac{13\pi}{24} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

c) $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13 \Leftrightarrow 5\sin 2x - 6\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = 13$

$\Leftrightarrow 5\sin 2x - 3\cos 2x = 16 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{34}}\sin 2x - \frac{3}{\sqrt{34}}\cos 2x = \frac{16}{\sqrt{34}}$

$\Leftrightarrow \sin(2x - \alpha) = \frac{16}{\sqrt{34}}$, với $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$.

Do $\frac{16}{\sqrt{34}} > 1 \Rightarrow \sin(2x-\alpha) = \frac{16}{\sqrt{34}}$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 31: Một vật nặng treo bởi một chiếc lò xo, chuyển động lên xuống qua vị trí cân bằng (h. 1.27(SGK)). Khoảng cách h từ vật đó đến vị trí cân bằng ở thời điểm t (giây) được tính theo công thức $h = |d|$ trong đó $d = 5\sin 6t - 4\cot 6t$, với d được tính bằng xentimet, ta quy ước rằng $d > 0$ khi vật ở phía trên vị trí cân bằng, $d < 0$ khi vật ở phía dưới vị trí cân bằng. Hỏi:

a) Ở vào thời điểm nào trong một giây đầu tiên, vật ở vị trí cân bằng?

b) Ở vào thời điểm nào trong một giây đầu tiên, vật ở xa vị trí cân bằng nhất? (Tính chính xác đến $\frac{1}{100}$ giây).

Hướng dẫn giải

a) Vật ở vị trí cân bằng khi $d = 0 \Leftrightarrow 5\sin 6t - 4\cos 6t = 0$

$\Leftrightarrow \tan 6t = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 6t = \arctan\frac{4}{5} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{6}\arctan\frac{4}{5} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$

Do $0 \le t \le 1 \Rightarrow t = \frac{1}{6}\arctan\frac{4}{5} \approx 0,11$ (giây) và $t = \frac{1}{6}\arctan\frac{4}{5} + \frac{\pi}{6} \approx 0,64$.

b) Ta có: $d = 5\sin 6t - 4\cos 6t = \sqrt{41}\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\sin 6t - \frac{4}{\sqrt{41}}\cos 6t\right)$

$$= \sqrt{41}\sin(6t - \alpha) \text{ với } \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}},\ \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}.$$

$\Rightarrow |d| \le \sqrt{41}$.

Vật ở xa vị trí cân bằng nhất khi $d = \pm\sqrt{41} \Leftrightarrow \sin(6t - \alpha) = \pm 1$

* $\sin(6t - \alpha) = 1 \Leftrightarrow 6t - \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi + 2\alpha}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

Do $0 \le t \le 1$ và $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}} \Rightarrow \alpha \approx 0,675$ (giây)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi + 2\alpha}{12} \approx 0,37 \text{ (giây)} \\ t = \frac{\pi + 2\alpha}{12} + \frac{k\pi}{3} \end{array}\right.$$

* $\sin(6t - \alpha) = -1$ tương tự ta tìm được $t \approx 0,64$ (giây).

Bài 32: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi biểu thức sau:

a) a.sinx + b.cosx (a, b là hằng số, $a^2 + b^2 \neq 0$);

b) $\sin^2 x + \sin x.\cos x + 3\cos^2 x$;

c) $A\sin^2 x + B\sin x.\cos x + C\cos^2 x$ (A, B, C là hằng số).

Giải

a) Đặt $A = a.\sin x + b.\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$

$A = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x + \alpha)$, $\left(\text{với } \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

$\Rightarrow |A| \le \sqrt{a^2+b^2}$ hay $-\sqrt{a^2+b^2} \le A \le \sqrt{a^2+b^2}$.

Nên Max A = $\sqrt{a^2+b^2}$ và Min A = $-\sqrt{a^2+b^2}$.

b) $B = \sin^2 x + \sin x\cos x + 3\cos^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{3(1 + \cos 2x)}{2}$

$$B = 2 + \frac{1}{2}(\sin 2x + 2\cos 2x)$$

$$B = 2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2x + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2x\right)$$

$$B = 2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2x + \alpha),\ \left(\text{với } \frac{1}{\sqrt{5}} = \cos\alpha, \frac{2}{\sqrt{5}} = \sin\alpha\right)$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{\sqrt{5}}{2} \le B \le 2 + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Nên Max B = $2 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ và Min B = $2 - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

c) Tương tự

$$P = A\sin^2 x + B\sin x.\cos x + C\cos^2 x = \frac{A}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{B}{2}\sin 2x + \frac{C}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$P = \frac{C - A}{2} + \frac{1}{2}\left[B\sin 2x + (C - A)\cos 2x\right]$$

$$P = \frac{C - A}{2} + \frac{\sqrt{B^2 + (C - A)^2}}{2}\left(\frac{B}{\sqrt{B^2 + (C - A)^2}}.\sin 2x + \frac{C - A}{\sqrt{B^2 + (C - A)^2}}\cos 2x\right)$$

$$P = \frac{C - A}{2} + \frac{\sqrt{B^2 + (C - A)^2}}{2}.\sin(2x + \alpha)$$

với $\sin\alpha = \frac{C - A}{\sqrt{B^2 + (C - A)^2}}$, $\cos\alpha = \frac{B}{\sqrt{B^2 + (C - A)^2}}$.

$$\Rightarrow \frac{C - A}{2} - \frac{\sqrt{B^2 + (C - A)^2}}{2} \le P \le \frac{C - A}{2} + \frac{\sqrt{B^2 + (C - A)^2}}{2}$$

Nên Max P = $\frac{C - A}{2} + \frac{\sqrt{B^2 + (C - A)^2}}{2}$; Min P = $\frac{C - A}{2} - \frac{\sqrt{B^2 + (C - A)^2}}{2}$.

Bài 33: Giải các phương trình sau:

a) $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 4$;

b) $3\sin^2 x + 4\sin 2x + \left(8\sqrt{3} - 9\right)\cos^2 x = 0$;

c) $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$.

Giải

a) Với cosx = 0, phương trình trở thành: 2 = 4 (vô lí), nên cosx $\neq 0$.
Với cosx $\neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2$x ta được:

$$2\tan^2 x + 3\sqrt{3}\tan x - 1 = \frac{4}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^2 x + 3\sqrt{3}\tan x - 1 = 4\left(1 + \tan^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^2 x - 3\sqrt{3}\tan x + 5 = 0 \quad (\triangle = 27 - 40 = -13 < 0)$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

b) Nhận thấy cosx = 0 không thỏa mãn phương trình, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ $(\cos x \neq 0)$ ta được:

$$3\tan^2 x + 8\tan x + 8\sqrt{3} - 9 = 0 \quad \left(\Delta' = \left(3\sqrt{3} - 4\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \\ \tan x = \dfrac{-8 + 3\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\dfrac{8}{3} + \sqrt{3}\right) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

c) Tương tự a) cosx = 0 không thỏa mãn.

cosx ≠ 0, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$, ta được:

$$\tan^2 x + 2\tan x - 2 = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x + 4\tan x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-5) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 34: Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng hoặc tổng thành tích để giải các phương trình sau:

a) cosx.cos5x = cos2x.cos4x ; b) cos5x.sin4x = cos3x.sin2x ;

c) sin2x + sin4x = sin6x ; d) sinx + sin2x = cosx + cos2x .

Giải

a) cosx.cos5x = cos2x.cos4x $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}[\cos 6x + \cos 4x] = \dfrac{1}{2}[\cos 6x + \cos 2x]$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 2x + k2\pi \\ 4x = -2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b) cos5x.sin4x = cos3x.sin2x $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}[\sin 9x - \sin x] = \dfrac{1}{2}[\sin 5x - \sin x]$

$$\Leftrightarrow \sin 9x = \sin 5x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x = 5x + k2\pi \\ 9x = \pi - 5x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{14} + k\dfrac{\pi}{7} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

c) sin2x + sin4x = sin6x $\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos x = 2\sin 3x\cos 3x$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x\left(\cos x-\cos 3x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x=0\\ \cos x=\cos 3x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x=k\pi\\ 3x=x+k2\pi\\ 3x=-x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{\pi}{3}\\ x=k\pi\\ x=k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{\pi}{3}\\ x=k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

(do họ nghiệm $x=k\pi$ nằm trong họ nghiệm $x=k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$).

d) $\sin x+\sin 2x=\cos x+\cos 2x \Leftrightarrow 2\sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=2\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2}=0\\ \sin\dfrac{3x}{2}=\cos\dfrac{3x}{2}\end{array}\right.$$

(*) $\cos\dfrac{x}{2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$

(*) $\sin\dfrac{3x}{2}=\cos\dfrac{3x}{2} \Leftrightarrow \sin\dfrac{3x}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3x}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{3x}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3x}{2}+k2\pi\\ \dfrac{3x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3x}{2}+k2\pi(\text{vô nghiệm})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy các nghiệm của phương trình: $x=\pi+k2\pi$, $x=\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$.

Bài 35: Dùng công thức hạ bậc để giải phương trình:

a) $\sin^2 4x+\sin^2 3x=\sin^2 2x+\sin^2 x$;

b) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$.

Giải

a) $\sin^2 4x+\sin^2 3x=\sin^2 2x+\sin^2 x$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 8x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x+\cos 6x=\cos 4x+\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2.\cos 7x.\cos x=2\cos 3x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left[\cos 7x-\cos 3x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ \cos 7x = \cos 3x \end{array}\right.$$

$$\cos 7x = \cos 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = 3x + k2\pi \\ 7x = -3x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{5} \\ x = \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{k\pi}{2}$, $x = \dfrac{k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3x.\cos x + 2\cos 7x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left[\cos 3x + \cos 7x\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos x.\cos 5x.\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 5x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 5x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{10} + k\dfrac{\pi}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 36: Giải các phương trình sau:

a) $\tan\dfrac{x}{2} = \tan x$; b) $\tan\left(2x + 10^0\right) + \cot x = 0$;

c) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$; d) $\tan x + \tan 2x = \sin 3x.\cos x$;

e) $\tan x + \cot 2x = 2\cot 4x$.

Giải

a) $\tan\dfrac{x}{2} = \tan x \Leftrightarrow x = \dfrac{x}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

b) $\tan\left(2x + 10^0\right) + \cot x = 0 \Leftrightarrow \tan\left(2x + 10^0\right) = -\cot x = \tan\left(90^0 + x\right)$

$\Rightarrow 2x + 10^0 = x + 90^0 + k180^0 \Leftrightarrow x = 80^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z}.$

c) Điều kiện xác định: $\cos x \neq 0$.

$(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin 2x) = \cos x + \sin x$

$\Rightarrow (\cos x - \sin x)\left(\cos^2 x + 2\sin x.\cos x + \sin^2 x\right) = \cos x + \sin x$

$\Rightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x + \sin x) = 0$

$\Rightarrow (\cos x + \sin x)\left[(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -\cos x \\ \cos 2x = 1\end{array}\right.$

d) $\tan x + \tan 2x = \sin 3x.\cos x \Leftrightarrow \dfrac{\sin 3x}{\cos x.\cos 2x} = \sin 3x.\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 3x - \sin 3x.\cos^2 x.\cos 2x = 0$ (*với* $\cos x.\cos 2x \neq 0$)

$\Leftrightarrow \sin 3x(1 - \cos^2 x.\cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0 \\ 1 - \cos^2 x.\cos 2x = 0\end{array}\right.$

- $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{3}, k \in Z$
- $1 - \cos^2 x.\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1 + \cos 2x}{2}\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -2 < 1 \text{ (loại)}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Do họ nghiệm $x = k\pi$ chứa trong họ nghiệm $x = k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ nên phương trình có nghiệm $x = k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

e) $\tan x + \cot 2x = 2\cot 4x \Leftrightarrow \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} + \dfrac{\sin x}{\cos x} = 2.\dfrac{\cos 4x}{\sin 4x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos 2x.\cos x + \sin x.\sin 2x}{\sin 2x.\cos x} = \dfrac{\cos 4x}{\sin 2x.\cos 2x}$ $(\cos x.\sin 2x.\cos 2x \neq 0)$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos 4x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x = -2x + k2\pi \\ 4x = 2x + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\dfrac{\pi}{3}, k \in Z \\ x = k\pi\end{array}\right.$

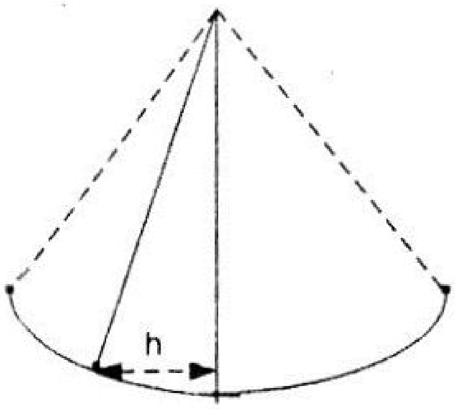
$\Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ (do $x = k\pi$ chứa trong $x = k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$).

Mặt khác do $\left\{\begin{array}{l}\sin 2x \neq 0 \\ \sin 4x \neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 4x \neq 0$

Nên $x = k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ và k không chia hết cho 3 là họ nghiệm của phương trình ban đầu.

LUYỆN TẬP

Bài 37 Mùa xuân ở Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) thường có trò chơi đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (tính bằng mét) từ người chơi đu đến vị trí cân bằng (h. 1.32(SGK)) được biểu diễn qua thời gian t ($t \geq 0$ và được tính bằng giây) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước rằng $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp trái lại.



a) Tìm các thời điểm trong vòng 2 giây đầu tiên mà người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất.

b) Tìm các thời điểm trong vòng 2 giây đầu tiên mà người chơi đu ở cách vị trí cân bằng 2 mét (tính chính xác đến $\frac{1}{100}$ giây).

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $|d| = \left|3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]\right| \leq 3$

$\Rightarrow$ người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất khi $d = \pm 3$.

$\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1$ và $0 \leq t \leq 2$.

- $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} + 6k, k \in \mathbb{Z}$

Do $0 \leq t \leq 2 \Rightarrow k = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

- Tương tự câu a) $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = -1$ và $0 \leq t \leq 2 \Leftrightarrow t = 2$

Vậy thời điểm cần tìm là $\frac{1}{2}$ (s) và 2 (s).

b) Tương tự câu a) $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 2$

- $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \frac{2}{3}$, $0 \le t \le 2$ $\Rightarrow$ $t_1 = 0{,}90$ (s), $t_2 = 0{,}10$ (s).
- $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = -\frac{2}{3}$, $0 \le t \le 2$ $\Rightarrow$ $t_3 = 1{,}60$ (s).

Bài 38: Giải các phương trình sau:

a) $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$; b) $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x + \cot x) = 2$;

c) $\sin x + \sin^2 \frac{x}{2} = 0{,}5$.

Giải

a) $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right)\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \sqrt{3}\sin x\\ \cos x = -\sqrt{3}\sin x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x = \sqrt{3}\\ \cot x = -\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6} + k\pi\\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right. ,k \in \mathbb{Z}.$$

b) $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x + \cot x) = 2$

Đặt t = tanx + cotx, ta được phương trình:
$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ và $t = 2$.

$$\Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x + \cot x) - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x + \cot x = -1\\ \tan x + \cot x = 2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x + \dfrac{1}{\tan x} = -1\\ \tan x + \dfrac{1}{\tan x} = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan^2 x + \tan x + 1 = 0\\ \tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0\end{array}\right.$$

- $\tan^2 x + \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\tan x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$, (vô nghiệm).
- $\tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

c) $\sin x + \sin^2 \frac{x}{2} = 0{,}5 \Leftrightarrow \sin x + \frac{1 - \cos x}{2} = 0{,}5$

$$\Leftrightarrow 2\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 39: Chứng minh rằng các phương trình sau đây vô nghiệm:

a) $\sin x - 2\cos x = 3$; b) $5\sin 2x + \sin x + \cos x + 6 = 0$.

Giải

a) $\sin x - 2\cos x = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right) = \sqrt{5}\sin(x - \alpha)$

(với $\frac{1}{\sqrt{5}} = \cos\alpha$, $\frac{2}{\sqrt{5}} = \sin\alpha$).

$\Rightarrow \sin x - 2\cos x = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}\sin(x - \alpha) = 3 \Leftrightarrow \sin(x - \alpha) = \frac{3}{\sqrt{5}} > 1$ nên phương trình vô nghiệm.

b) $5\sin 2x + \sin x + \cos x + 6 = 0 \Leftrightarrow 10\sin x.\cos x + \cos x + \sin x + 6 = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow |t| \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow t^2 = \sin^2 x + 2\sin x.\cos x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

Thay vào ta được phương trình: $5t^2 + t + 1 = 0$, có $\Delta = -19 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Bài 40: Tìm các nghiệm của phương trình sau trong các khoảng đã cho (cần tính gần đúng đến $\frac{1}{10}$ giây).

a) $2\sin^2 x - 3\cos x = 2,\ 0^0 \le x \le 360^0$;

b) $\tan x + 2\cot x = 3,\ 180^0 \le x \le 360^0$.

Giải

a) Đưa phương trình về: $(2\cos x + 3)\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = -\frac{3}{2} < -1 \text{ vô nghiệm}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = 90^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z}.$$

Do $0^0 \le x \le 360^0 \Rightarrow k = 0, k = 1 \Rightarrow x = 90^0$ và $x = 270^0$.

b) Đưa phương trình về: $\tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0$ (với $\sin 2x \ne 0$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 45^0 + k180^0\\ x = \arctan 2 + k180^0\end{array}\right.$$

- $x = 45^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z}$ và $180^0 \le x \le 360^0 \Leftrightarrow x = 45^0 + 180^0 = 225^0$.
- $x = \arctan 2 + k180^0, k \in \mathbb{Z}$ và $180^0 \le x \le 360^0$

$$\Leftrightarrow x \approx 63^0 26' 5,8'' + 180^0 \approx 243^0 26' 5,8''.$$

Bài 41: Giải các phương trình sau:

a) $3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0$;

b) $3\sin^2 2x - \sin 2x \,.\, \cos 2x - 4\cos^2 2x = 2$;

c) $2\sin^2 x + \left(3+\sqrt{3}\right)\sin x.\cos x + \left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x = -1$.

Hướng dẫn giải

a) $3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 x - 2\sin x.\cos x - \cos^2 x = 0$

- **Xét cosx = 0 không thỏa mãn.**
- $\cos x \neq 0$, chia hai vế cho $\cos^2 x$ ta được phương trình:

$$3\tan^2 x - 2\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\dfrac{1}{3}\right) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

b) Tương tự câu a) $\cos 2x \neq 0$, đưa phương trình về dạng

$$\tan^2 2x - \tan 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan 2x = -2 \\ \tan 2x = 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \arctan(-2) + k\pi \\ 2x = \arctan 3 + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\arctan(-2) + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{1}{2}\arctan 3 + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

c) Tương tự câu a) $\cos x \neq 0$ đưa phương trình về dạng

$$3\tan^2 x + \left(3+\sqrt{3}\right)\tan x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan x = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Bài 42: Giải các phương trình sau:

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$;

b) $\sin x = \sqrt{2}\sin 5x - \cos x$;

c) $\dfrac{1}{\sin 2x} + \dfrac{1}{\cos 2x} = \dfrac{2}{\sin 4x}$;

d) $\sin x + \cos x = \dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích để đưa phương trình về dạng:

$\sin 2x(2\cos x + 1) = \cos 2x(2\cos x + 1)$

$\Leftrightarrow (\sin 2x - \cos 2x)(2\cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x - \cos 2x = 0 \\ 2\cos x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = \cos 2x \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan 2x = 1 \\ \cos x = \cos \dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\sin x = \sqrt{2}\sin 5x - \cos x \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 5x$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin 5x \Leftrightarrow \sin 5x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Giải ra ta được nghiệm $x = \dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

c) Điều kiện xác định: $\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x \neq 0(*)$.

$\dfrac{1}{\sin 2x} + \dfrac{1}{\cos 2x} = \dfrac{2}{\sin 4x} \Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = 1$, (vì sin4x = 2sin2x.cos2x)

$$\Rightarrow \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \text{ (không thỏa mãn (*))}.$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

d) Điều kiện: $\sin 2x \neq 1\,(*)$

$\sin x + \cos x = \dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x - \sin x)^2}$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos x - \sin x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Giải ra ta được nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$ $, k \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn (*).

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: $x = 40^0$ là một nghiệm của phương trình nào sau đây?

(A) $2\tan\left(2x - 10^0\right) = -1$; (B) $\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$.

(C) $\sqrt{2}\cos\left(2x - 35^0\right) = 1$; (D) $2\cot\left(x - 35^0\right) - \sqrt{3} = 0$.

Câu 2: Các nghiệm của phương trình sinx – cos2x – 2 = 0 là:

(A) $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$; (B) $-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

(C) $\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$; (D) $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3: Phương trình 3 + 2sinx.sin3x = 3 cos2x có nghiệm là:

(A) $\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$; (B) $k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

(C) $\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; (D) $\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 4: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ là:

(A) –1 ; (B) 1 ; (C) 3 ; (D) – 3

Câu 5: Các nghiệm của phương trình $\sqrt{2}\left(\sin x + \cos x\right) = \dfrac{1}{2}\cos 2x$ là:

(A) $\dfrac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$; (B) $-\dfrac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

(C) $\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$; (D) $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(A)	(B)	(B)	(D)

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 43: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

a) Các hàm số y = sinx , y = cosx có cùng tập xác định.

b) Các hàm số y = tanx , y = cotx có cùng tập xác định.

c) Các hàm số y = sinx , y = tanx là những hàm số lẻ.

d) Các hàm số y = cosx , y = cotx là những hàm số chẵn.

e) Các hàm số y = sinx, y = cosx cùng nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

f) Hàm số y = cosx nghịch biến trên khoảng $(-2\pi;-\pi)$.

g) Trên mỗi khoảng mà hàm số y = tanx đồng biến thì hàm số y = cotx nghịch biến.

Giải

a) Đúng ; b) sai ; c) đúng ; d) sai ; e) sai ; f) đúng ; g) sai .

Bài 44: Xét hàm số y = f(x) = sin πx .

a) Chứng minh rằng mỗi số nguyên chẵn m ta có f(m + x) = f(x) , với mọi x.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-1;1]$.

c) Vẽ đồ thị hàm số đó.

Giải

a) m chẵn nên m = 2k , k ∈ ℤ, ta có:

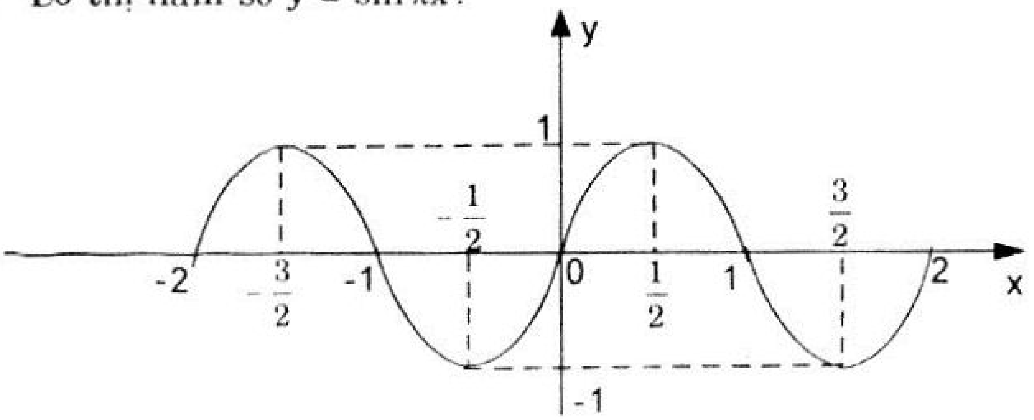
$$f(m+x)=f(2k+x)=\sin\left[\pi(2k+x)\right]=\sin(x\pi+k2\pi)=\sin\pi x=f(x)$$

$$\Rightarrow f(m+x)=f(x)\text{ với mọi x.}$$

b) Bảng biến thiên

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1
πx	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin \pi x$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

c) Đồ thị hàm số y = sin πx .



Bài 45: Đưa các biểu thức sau đây về dạng C.sin(x + α)

a) $\sin x + \tan\frac{\pi}{7}.\cos x$; b) $\tan\frac{\pi}{7}.\sin x + \cos x$.

Giải

a) $$\sin x + \tan\frac{\pi}{7}.\cos x = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}\left(\sin x.\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}.\cos x\right) = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}.\sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right).$$

b) $$\sin x.\tan\frac{\pi}{7} + \cos x = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}\left(\cos x.\cos\frac{\pi}{7} + \sin x.\sin\frac{\pi}{7}\right) = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}.\cos\left(-x + \frac{\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}.\sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(-x + \frac{\pi}{7}\right)\right] = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}.\sin\left(\frac{5\pi}{14} + x\right).$$

Bài 46: Giải các phương trình sau:

a) $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2x$; b) $\tan\left(2x + 45^0\right).\tan\left(180^0 - \frac{x}{2}\right) = 1$;

c) $\cos 2x - \sin^2 x = 0$; d) $5\tan x - 2\cot x = 3$.

Giải

a) $$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{16} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b) $$\tan\left(2x + 45^0\right).\tan\left(180^0 - \frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow -\tan\left(2x + 45^0\right).\tan\frac{x}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + 45^0\right).\sin\frac{x}{2} + \cos\left(2x + 45^0\right).\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3x}{2} + 45^0\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{2} + 45^0 = 90^0 + k180^0 \Leftrightarrow x = 30^0 + k120^0, k \in \mathbb{Z}.$$

c) $$\cos 2x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x - \frac{1 - \cos 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\arccos\frac{1}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

d) $$5\tan x - 2\cot x = 3 \Leftrightarrow 5\tan x - \frac{2}{\tan x} = 3 \Leftrightarrow 5\tan^2 x - 3\tan x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\dfrac{2}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\dfrac{2}{5}\right) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 47: Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + \sin^2 x = \dfrac{1}{2}$; b) $2\sin^2 x + 3\sin x.\cos x + \cos^2 x = 0$;

c) $\sin^2 \dfrac{x}{2} + \sin x - 2\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Giải

a) $\sin 2x + \sin^2 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x + \dfrac{1 - \cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = \arctan \dfrac{1}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\arctan \dfrac{1}{2} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

b) Nếu cosx = 0, phương trình trở thành 2 = 0 , nên $\{x \in R | \cos x = 0\}$ không là nghiệm của phương trình, cosx ≠ 0, chia cả hai vế phương trình cho $\cos^2 x$, ta được:

$$2\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

c) $\sin^2 \dfrac{x}{2} + \sin x - 2\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \dfrac{x}{2} + 2\sin \dfrac{x}{2}\cos \dfrac{x}{2} - 2\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}$

Tương tự câu a) chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 \dfrac{x}{2}$ ta được:

$$\tan^2 \frac{x}{2} + 2\tan \frac{x}{2} - 2 = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \tan^2 \frac{x}{2} + 4\tan \frac{x}{2} - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan \dfrac{x}{2} = 1 \\ \tan \dfrac{x}{2} = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \dfrac{x}{2} = \arctan(-5) + k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = 2\arctan(-5) + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 48:

a) Chứng minh rằng: $\sin \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$.

b) Giải phương trình $2\sin x - 2\cos x = 1 - \sqrt{3}$ bằng cách biến đổi vế trái về dạng $C.\sin(x + \alpha)$.

c) Giải phương trình $2\sin x - 2\cos x = 1 - \sqrt{3}$ bằng cách bình phương hai vế.

Giải

a) Ta có: $\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(4 - 2\sqrt{3}\right)$

$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{8}\left(\sqrt{3} - 1\right)^2$

$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ (do $\sin\frac{\pi}{12} > 0$)

b) $$2\sin x - 2\cos x = \sqrt{8}\left(\frac{2}{\sqrt{8}}\sin x - \frac{2}{\sqrt{8}}\cos x\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sin x.\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}.\cos x\right) \text{ (vì } \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{)}$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 2\sin x - 2\cos x = 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = -\sin\frac{\pi}{12} \text{ (theo câu a))}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

c) $2\sin x - 2\cos x = 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\cos x - 2\sin x = \sqrt{3} - 1$

Bình phương hai vế ta được: $4\sin^2 x + 4\cos^2 x - 8\sin x.\cos x = 4 - 2\sqrt{3}$ $(2\cos x - 2\sin x \geq 0)$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

- $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, *) k lẻ $\Rightarrow 2\cos x - 2\sin x < 0$ (loại)

  *) k chẵn $\Rightarrow 2\cos x - 2\sin x > 0$

- $x = \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{4\pi}{3} + (k-1)\pi$

  *) Với k chẵn $\Rightarrow 2\cos x - 2\sin x < 0$ (loại)

  *) Với k lẻ $\Rightarrow 2\cos x - 2\sin x > 0$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ và k chẵn.

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ và k lẻ.

Bài 49: Giải phương trình: $\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 1 \end{cases}$ (*)

$$\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} \Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x}{\cos x} = \frac{2\sin x.\cos x}{2\sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x = \cos x \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \text{ thỏa mãn (*)}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Bài 50: Cho phương trình $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$

a) Chứng minh rằng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nghiệm đúng phương trình.

b) Giải phương trình bằng cách đặt tanx = t (khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$).

Giải

* Điều kiện $2\cos x - \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq \frac{1}{2}$

Phương trình tương đương với:

$\sin^3 x + \cos^3 x = (\cos^2 x - \sin^2 x).(2\cos x - \sin x)$

$$\Leftrightarrow 2\cos x.\sin^2 x + \cos^2 x.\sin x - \cos^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(2\sin^2 x + \sin x.\cos x - \cos^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2\sin^2 x + \sin x.\cos x - \cos^2 x = 0\,(*) \end{cases}.$$

a) Phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ hay $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ nghiệm đúng phương trình.

b) Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \cos x \neq 0$. Chia hai vế của phương trình (*) cho $\cos^2 x$ ta được: $2\tan^2 x + \tan x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\dfrac{1}{2} + k\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \arctan\dfrac{1}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong các bài từ 51 đến 63, hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả đã cho:

Bài 51: Giá trị lớn nhất của biểu thức: $\sin^4 x + \cos^4 x$ là:

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) 2 ; (D) $\dfrac{1}{2}$.

Giải

$$P = \sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x \le 1$$

$\Rightarrow$ Max P = 1.

Đáp án (B).

Bài 52: Giá trị bé nhất của biểu thức $\sin x + \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ là:

(A) −2 ; (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (C) −1 ; (D) 0.

Giải

$$P = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 2.\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \ge -1$$

$\Rightarrow$ Min P = −1

Đáp án (C).

Bài 53: Tập giá trị của hàm số $y = 2.\sin 2x + 3$ là:

(A) $[0;1]$; (B) $[2;3]$; (C) $[-2;3]$; (D) $[1;5]$.

Giải

Ta có $-1 \le \sin 2x \le 1 \Leftrightarrow 1 \le 2\sin 2x + 3 \le 5$

$\Rightarrow$ Tập giá trị của hàm số là $[1;5]$

Đáp án (D).

Bài 54: Tập giá trị của hàm số $y = 1 - 2|\sin 3x|$ là:

(A) $[-1;1]$; (B) $[0;1]$; (C) $[-1;0]$; (D) $[-1;3]$.

Giải

Ta có $0 \le |\sin 3x| \le 1 \Rightarrow -1 \le 1 - 2|\sin 3x| \le 1$.

$\Rightarrow$ Tập giá trị của hàm số $y = 1 - 2|\sin 3x|$ là $[-1;1]$.

Đáp án (A).

Bài 55: Giá trị lớn nhất của biểu thức $y = \cos^2 x - \sin x$ là:

(A) 2 ; (B) 0 ; (C) $\frac{5}{4}$; (D) 1.

Giải

Ta có $y = \cos^2 x - \sin x = -\sin^2 x - \sin x + 1$

$$y = -\left(\sin^2 x + \sin x + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4} = \frac{5}{4} - \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{5}{4}$$

$\Rightarrow \text{Max } y = \frac{5}{4}$.

Đáp án (C).

Bài 56: Tập giá trị của hàm số $y = 4\cos 2x - 3\sin 2x + 6$ là:

(A) $[3;10]$; (B) $[6;10]$; (C) $[-1;13]$; (D) $[1;11]$.

Giải

$$\text{Ta có } y = 4\cos 2x - 3\sin 2x + 6 = 5\left(\frac{4}{5}\cos 2x - \frac{3}{5}\sin 2x\right) + 6$$

$$= 5\cos(2x + \alpha) + 6 \text{ với } \sin\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Do $-1 \le \cos(2x + \alpha) \le 1 \Rightarrow 1 \le y \le 11$

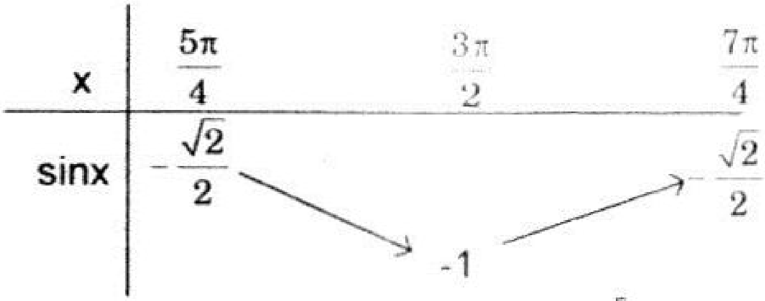
Đáp án (D).

Bài 57: Khi x thay đổi trong khoảng $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$ thì $y = \sin x$ lấy mọi giá trị thuộc:

(A) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$; (B) $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; (C) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$; (D) $[-1;1]$.

Giải

Bảng biến thiên của $y = \sin x$ trên $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$


x
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$
sinx
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
-1
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ **y = sinx** nhận mọi giá trị thuộc. $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

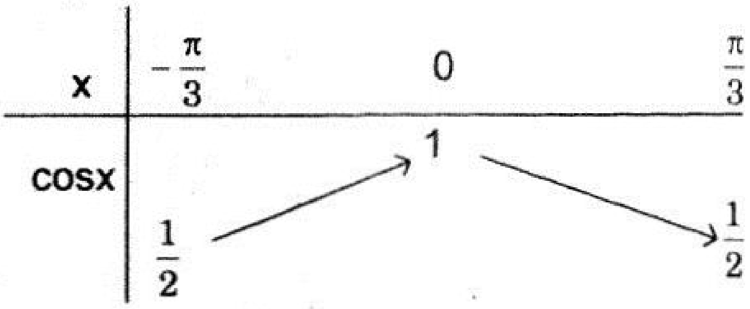
Đáp án (B).

Bài 58: Khi x thay đổi trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ thì $y = \cos x$ lấy mọi giá trị thuộc:

(A) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; (B) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; (C) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; (D) $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

Giải

Bảng biến thiên của $y = \cos x$


x
$-\frac{\pi}{3}$
0
$\frac{\pi}{3}$
cosx
$\frac{1}{2}$
1
$\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ **y = cosx** nhận mọi giá trị thuộc $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Đáp án (A).

Bài 59: Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ thuộc đoạn $[\pi; 2\pi]$ là:

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 0 ; (D) 3.

Giải

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Do $x \in [\pi; 2\pi] \Leftrightarrow \pi \le \frac{\pi}{4} + k2\pi \le 2\pi$, vô nghiệm.

Đáp án (C).

Bài 60: Số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ thuộc đoạn $[0;\pi]$ là:

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 0.

Giải

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Do $x\in[0;\pi] \Leftrightarrow 0\le -\frac{3\pi}{8}+k\pi\le\pi \Leftrightarrow k=1$

$\Rightarrow x=\frac{5\pi}{8}\in[0;\pi]$ nên phương trình có một nghiệm thuộc $[0;\pi]$

Đáp án (A).

Bài 61: Một nghiệm của phương trình $\sin^2x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=2$ là:

(A) $\frac{\pi}{12}$; (B) $\frac{\pi}{3}$; (C) $\frac{\pi}{8}$; (D) $\frac{\pi}{6}$.

Giải

Dùng công thức hạ bậc đưa phương trình về dạng :
$\cos2x\,(2\cos^2 2x+\cos2x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos 2x=-1\\ \cos 2x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 2x=\pi+k2\pi\\ 2x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Khi $k=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$.

Đáp án (D).

Bài 62: Số nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$ thuộc khoảng $(\pi;8\pi)$ là:

(A) 1 ; (B) 3 ; (C) 2 ; (D)4.

Giải

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi$; $x=\frac{\pi}{2}+4\pi$; $x=\frac{\pi}{2}+6\pi$ thuộc $(\pi;8\pi)$.

Đáp án (B).

Bài 63: Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x+1}=0$ thuộc đoạn $[2\pi;4\pi]$ là:

(A) 2 ; (B) 4 ; (C) 5 ; (D) 6.

Giải

Điều kiện $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\dfrac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow x = 2\pi,\ x = \dfrac{7\pi}{3},\ x = \dfrac{8\pi}{3},\ x = \dfrac{10\pi}{3},\ x = \dfrac{11\pi}{3},\ 4\pi$ thuộc đoạn $[2\pi; 4\pi]$.

Đáp án (D).

CHƯƠNG II: TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

§1. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Quy tắc cộng cho công việc với 2 phương án:

Giả sử một công việc có thể thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Có n cách thực hiện phương án A và m cách thực hiện phương án B. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi n + m cách.

Quy tắc cộng cho nhiều hơn hai phương án được phát biểu tương tự như quy tắc trên.

2. Quy tắc nhân cho công việc có 2 công đoạn:

Giả sử một công việc nào đó hai công đoạn A và B. Công đoạn A có thể làm theo n cách. Với mỗi cách thực hiện công đoạn A thì công đoạn B có thể làm theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo m.n cách.

Quy tắc nhân cho công việc có nhiều hơn 2 công đoạn được định nghĩa tương tự như quy tắc trên.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 1: Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi bạn có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu và về cỡ áo).

Giải

Nếu chọn cỡ áo 39 thì có 5 cách chọn (vì cỡ này có 5 màu khác nhau).

Nếu chọn cỡ áo 40 thì có 4 cách chọn (vì cỡ này có 4 màu khác nhau).

Hiển nhiên là mỗi cách chọn 1 chiếc áo cỡ 39 không thể trùng cách chọn 1 chiếc áo bất kì cỡ 40. Do đó có tổng cộng là: 5 + 4 = 9 (cách).

Bài 2: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà cả hai chữ số của nó đều chẵn ?

Giải

Giả sử số tự nhiên đó có dạng $\overline{ab}$, trong đó: a, b $\in \{0, 1, 2, ..., 8, 9\}$ và $a \neq 0$.

Như vậy có 4 cách chọn chữ số a vì chỉ có thể lấy a là một trong các số 2, 4, 6, 8.

Ứng với mỗi cách chọn chữ số a ta có 5 cách chọn chữ số b vì b chỉ có thể lấy một trong các số 0, 2, 4, 6, 8.

Theo quy tắc nhân có 4 . 5 = 20 cách thành lập số tự nhiên thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Bài 3: Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ.

a) Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

b) Nhà trường cần chọn 2 học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn ?

Giải

a) Khối 11 có tổng cộng là 280 + 325 = 605 học sinh. Do đó có 605 cách chọn 1 học sinh khối 11 đi dự dạ hội học sinh thành phố.

b) Có 280 cách chọn học sinh nam. Ứng với mỗi cách chọn một học sinh nam có 325 cách chọn một học sinh nữ. Do đó theo quy tắc nhân có: 280 . 325 = 91 000 cách chọn 2 học sinh, trong đó có một nam, một nữ đi dự trại hè.

Bài 4: Từ các chữ số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 4 chữ số (không nhất thiết khác nhau)?

b) Có 4 chữ số khác nhau.

Giải

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số được thành lập từ 4 chữ số đã cho là: $\overline{abcd}$.

a) Do 4 số a, b, c, d không nhất thiết khác nhau nên mỗi số a, b, c, d đều có 4 cách chọn khác nhau. Do đó, theo quy tắc nhân có tất cả là 4.4.4.4 = 256 cách chọn.

Vì vậy có 256 số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu.

b) Trường hợp 4 số a, b, c, d khác nhau (đôi một khác nhau) thì có 4 cách chọn số a, 3 cách chọn số b, 2 cách chọn số c, 1 cách chọn số d. Nên có 4.3.2.1 = 24 cách chọn.

Vậy có 24 số thỏa mãn yêu cầu.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Các số tự nhiên chẵn có 3 chữ số được thành lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 là:

(A) 186 ; (B) 168 ; (C) 618 ; (D) 816.

2. Số các số tự nhiên có 4 chữ số và chia hết cho 5 là:

(A) 1500 ; (B) 1600 ; (C) 1700 ; (D) 1800.

3. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Thầy chủ nhiệm lớp muốn chọn 3 học sinh để tham gia tổ chức lễ khai giảng.

a) Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh trong lớp?

(A) 9880 ; (B) 8980 ; (C) 8890 ; (D) 8908.

b) Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh trong đó có 1 nam và 2 nữ?

(A) 2562 ; (B) 2265 ; (C) 2625 ; (D) 2526.

4. Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 10 000 được tạo thành từ 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4.

(A) 200 ; (B) 300 ; (C) 400 ; (D) 500.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3a	3b	4
Đáp án	(B)	(D)	(A)	(C)	(D)

§2. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hoán vị:

a) Định nghĩa: Cho tập A có n $(n \geq 1)$ phần tử. Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự, ta được một hoán vị các phần tử của tập A (gọi tắt là một hoán vị của A).

b) Số các hoán vị:

Kí hiệu số các hoán vị của tập có n phần tử $(n \geq 1)$ là P_n.

Khi đó $P_n = n! = n(n-1)(n-2)......1$.

2. Chỉnh hợp:

a) Định nghĩa: Cho tập A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Khi lấy ra k phần tử của tập A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một chỉnh hợp chập k của A)

b) Số các chỉnh hợp:

Kí hiệu số các chỉnh hợp chập k của n phần tử là A_n^k.

Khi đó: $A_n^k = n(n-1)(n-2).......(n-k+1)$.

Quy ước: $0! = 1$ ta có: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

3. Tổ hợp:

a) Định nghĩa: Cho tập A có n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là tổ hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một tổ hợp chập k của A)

b) Số các tổ hợp

Ký hiệu số các tổ hợp chập k của n phần tử là C_n^k.

Khi đó: $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0 \le k \le n)$

c) Hai tính chất cơ bản của số C_n^k.

- Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $0 \le k \le n$.
  Khi đó: $C_n^k = C_n^{n-k}$.
- Cho số nguyên n và k với $1 \le k \le n$.
  Khi đó: $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 5: Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong giải bóng đá có 5 đội bóng ? (Giả sử rằng không có hai đội nào có điểm trùng nhau).

Giải

Do không có hai đội nào có điểm trùng nhau nên nếu ta xếp thứ tự các đội thì sẽ không có 2 đội nào cùng một thứ tự. Vậy nên ứng với mỗi thứ tự từ 1 đến 5 của 5 đội bóng chính là một hoán vị của 5 phần tử, vì thế có tất cả là: $P_5 = 5! = 120$ (khả năng).

Bài 6: Giả sử có 8 vận động viên tham gia chạy thi. Nếu không kể trường hợp hai vận động viên về đích cùng một lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí nhất, nhì và thứ ba?

Giải

Do không có trường hợp có hai vận động viên về đích cùng một lúc nên 8 vận động viên đó về đích ở 8 thời điểm khác nhau. Vậy nên, ứng với mỗi bộ 3 vận động viên về đích đầu tiên chính là một chỉnh hợp chập 3 của 8 phần tử. Do đó số các kết quả có thể xảy ra ở các vị trí thứ nhất, nhì, ba sẽ là: $A_8^3 = \dfrac{8!}{5!} = 336$.

Bài 7: Trong mặt phẳng cho một tập hợp P gồm n điểm. Hỏi:

a) Có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu mút thuộc P?

b) Có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà điểm đầu, điểm cuối thuộc P?

Giải

a) Cứ hai điểm bất kì thuộc P cho ta đúng một đoạn thẳng. Do vậy số các đoạn thẳng mà hai đầu mút thuộc P sẽ là số các tổ hợp chập 2 của n phần tử hay là: $C_n^2 = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n.(n-1)}{2}$.

b) Do tập P có n điểm (không có 2 điểm nào trùng nhau) nên cứ mỗi đoạn thẳng mà hai đầu mút thuộc P cho ta đúng hai vectơ (cùng khác vectơ – không). Do vậy số các vectơ thỏa mãn yêu cầu là:

$$2.\frac{n.(n-1)}{2} = n(n-1).$$

Bài 8: Trong một Ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn 3 người vào ban thường vụ.

a) Nếu không có sự phân biệt về chức vụ của 3 người trong ban thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn?

b) Nếu cần chọn 3 người vào ban thường vụ với các chức vụ Bí thư, Phó Bí thư, Ủy viên thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn?

Giải

Số cách chọn 3 người bất kì trong 7 người là:

$$C_7^3 = 35$$

a) Nếu không có sự phân biệt về chức vụ của 3 người trong ban thường vụ thì số cách chọn trên chính là số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán hay có 35 cách chọn.

b) Ứng với mỗi cách chọn 3 người vào ban thường vụ sẽ có 3! = 6 cách phân công chức vụ Bí thư, Phó Bí thư, Ủy viên thường vụ. Do vậy theo quy tắc nhân có tất cả là: 35 . 6 = 210 (cách).

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Tập nghiệm S của phương trình: $A_n^2.C_n^{n-2} = 200$ là:

(A) $S = \{5;3\}$; (B) $S = \{5;6\}$; (C) $S = \{5\}$; (D) $S = \{5;7\}$.

2. Một lớp học có 20 học sinh gồm 12 nam và 8 nữ. Cần chọn 5 học sinh gồm 3 nam và 2 nữ để đi lao động. Số các cách chọn là:

(A) 6160 ; (B) 6610 ; (C) 6106 ; (D) 6601.

3. Một cái hộp đựng 3 bi xanh và 2 bi đỏ. Rút ra 3 bi, có bao nhiêu cách rút để lấy ra được ít nhất 1 bi xanh và 1 bi đỏ?

(A) 6 ; (B) 3 ; (C) 9 ; (D) 18.

4. Số các đường chéo của một thập giác lồi là:

(A) 45 ; (B) 35 ; (C) 25 ; (D) 15.

5. Giá trị của biểu thức: $P = \dfrac{C_{25}^{23} - C_{15}^{13} - 3C_{10}^{7}}{\dfrac{A_6^4 + A_5^4}{A_4^4}}$ là:

(A) 8 ; (B) – 8 ; (C) 8,25 ; (D) – 8,25.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(A)	(C)	(B)	(D)

LUYỆN TẬP

I. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 9: Một bài thi trắc nghiệm khách quan gồm 10 câu. Mỗi câu có 4 phương án trả lời. Hỏi bài thi đó có bao nhiêu phương án trả lời?

Giải

Ta chia việc trả lời hết 10 câu hỏi trắc nghiệm thành 10 công đoạn:

Công đoạn 1: Trả lời câu hỏi 1

Công đoạn 2: Trả lời câu hỏi 2

Công đoạn 10: Trả lời câu hỏi 10.

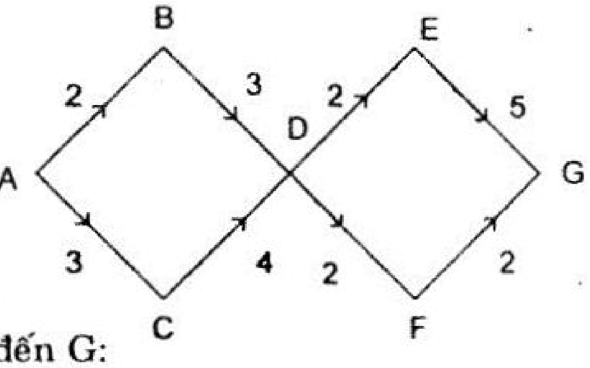
Với công đoạn 1 có 4 phương án trả lời, sau đó ứng với mỗi phương án trả lời ở công đoạn 1 có 4 phương án trả lời ở công đoạn 2. Cứ như vậy cho đến công đoạn thứ 10 có 4 phương án trả lời. Theo quy tắc nhân cho một công việc gồm nhiều công đoạn ta có: $4^{10} = 1\ 048\ 576$ phương án trả lời.

Bài 10. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số và chia hết cho 5?

Giải

Gọi số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Theo bài ra số này chia hết cho 5 nên a_6 có hai cách chọn là 0 hoặc 5. Do $a_1 \neq 0$ nên a_1 có 9 cách chọn trong các số {1; 2; 3; 4; 5; 6 ;7 8; 9}. Các số a_2, a_3, a_4, a_5 đều có 10 cách chọn trong các số {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}. Theo quy tắc nhân, số các số tự nhiên cần tìm là 9.10.10.10.10.2 = 180.000 số.

Bài 11: Xét mạng đường nối các tỉnh A, B, C, D, E, F, G trong đó số viết trên một cạnh cho biết số con đường nối hai tỉnh nằm ở hai đầu mút của cạnh (hình bên). Hỏi có bao nhiêu cách để đi từ tỉnh A đến tỉnh G.



Giải

Có đúng 4 lộ trình sau để đi được từ A đến G:

Lộ trình 1: A → B → D → E → G.

Lộ trình 2: A → B → D → F → G.

Lộ trình 3: A → C → D → E → G.

Lộ trình 4: A → C → D → F → G.

Vận dụng quy tắc nhân và giả thiết của bài toán, ta có:

Lộ trình 1 có: 2 . 3 . 2 . 5 = 60 cách đi từ A đến G.

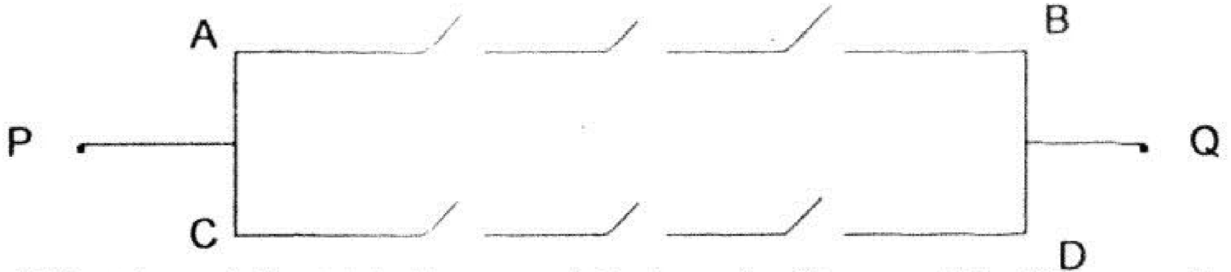
Lộ trình 2 có: 2 . 3 . 2 . 2 = 24 cách đi từ A đến G.

Lộ trình 3 có: 3 . 4 . 2 .5 = 120 cách đi từ A đến G.

Lộ trình 4 có: 3 . 4 . 2 . 2 = 48 cách đi từ A đến G.

Do đó có tổng cộng: 60 + 24 + 120 + 48 = 252 cách để đi từ A đến G.

Bài 12: Xét sơ đồ mạch điện ở hình 2.3, có 6 công tắc khác nhau, trong đó mỗi công tắc có hai trạng thái: đóng và mở:



Hỏi có bao nhiêu cách đóng – mở 6 công tắc để mạng điện thông mạch từ P đến Q (tức là có dòng điện từ P đến Q) ?

Giải

Mạng điện thông mạch từ P đến Q ta xét 2 trường hợp sau:

– Trường hợp 1: ba công tắc trên đoạn AB cùng đóng, khi đó các công tắc trên đoạn CD dù đóng hay mở thì vẫn có dòng điện chạy từ P đến Q.

Khi này có: 2 . 2 . 2 = 8 cách đóng – mở 3 công tắc trên đoạn CD.

– Trường hợp 2: hoàn toàn tương tự ta cũng có 8 cách đóng – mở công tắc trên nhánh AB, còn đúng một cách 3 công tắc cùng đóng trên nhánh CD để được dòng điện thông mạch từ P đến Q.

Vậy có tổng cộng là: 8 + 8 – 1 = 15 (cách).

(phải trừ bớt 1 vì 6 công tắc cùng đóng được tính tới 2 lần).

Bài 13: Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có 2 người nào có điểm bằng nhau.

a) Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra 4 người điểm cao nhất thì có bao nhiêu kết quả có thể?

b) Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì có bao nhiêu kết quả có thể?

Giải

a) Do giả thiết không có 2 người nào có điểm trùng nhau nên luôn tồn tại đúng 4 người có điểm cao nhất. Số cách chọn ra 4 người này chính là số các tổ hợp chập 4 của 15 hay là bằng $C_{15}^4 = 1365$ (cách).

b) Số các cách chọn ra các giải nhất, nhì, ba là: $A_{15}^3 = 2730$ (cách).

Bài 14: Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba và 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi:

a) Có bao nhiêu kết quả có thể?

b) Có bao nhiêu kết quả có thể nếu biết rằng người giữ vé số 17 được giải nhất?

c) Có bao nhiêu kết quả có thể nếu biết rằng người giữ vé số 47 trúng một trong 4 giải?

Giải

a) Số kết quả có thể là $A_{100}^4 = 94\ 109\ 400$.

b) Người giữ vé số 47 đoạt giải nhất nên 3 trong số 99 người chia nhau 3 vị trí 2, 3, 4 còn lại. Mỗi một bộ ba vị trí này có thể coi là một chỉnh hợp chập 3 của 99. Do vậy số các kết quả có thể trong tình huống này là: $A_{99}^3 = 941\ 094$.

c) Ta có thể xét trường hợp: vé số 47 đạt giải nhất, nhì, ba, tư, mỗi trường hợp làm tương tự như ở câu b) ta có được kết quả cho từng trường hợp. Do đó số các kết quả có thể trong tình huống này là:
$4\ .\ 94\ 1094 = 3\ 764\ 376$.

Bài 15: Một tổ có 8 em nam, 2 em nữ. Người ta cần chọn ra 5 em trong tổ tham dự cuộc thi học sinh thanh lịch của trường. Yêu cầu trong các em được chọn phải có ít nhất một học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Giải

– Trường hợp 1: Trong 5 em được chọn có một học sinh nữ.
Từ 5 em được chọn có một học sinh nữ nên ta suy ra có 4 học sinh nam. Do đó số cách chọn 4 học sinh nam trong 8 em là: $C_8^4 = 70$. Ứng với mỗi cách chọn 4 học sinh nam có $C_2^1 = 2$ cách chọn một học sinh trong 2 học sinh nữ. Theo quy tắc nhân có: $2\ .\ 70 = 140$ cách chọn thoả mãn trường hợp này.

– Trường hợp 2: Trong 5 em được chọn có hai học sinh nữ.
Chỉ có đúng một cách chọn 2 học sinh nữ trong 2 học sinh nữ đã có. Do đó để có đủ 5 em học sinh ta cần chọn ra 3 em nam trong số 8 em nam của tổ, số cách chọn là: $C_8^3 = 56$, đây cũng chính là số cách chọn 5 học sinh trong tổ thỏa mãn trường hợp này.
Vậy có tất cả: $2\ .\ 70 + 56 = 196$ cách chọn 1 tổ 5 người trong đó có ít nhất một học sinh nữ.

Bài 16: Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Người ta cần chọn ra 5 em trong nhóm tham gia đồng diễn thể dục. Trong 5 em được chọn yêu cầu không có quá một em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Giải

Chỉ có đúng 2 trường hợp xảy ra:
– Trường hợp 1: 5 em được chọn không có 1 học sinh nữ nào.
Lúc này số cách chọn 5 em tham gia đồng diễn thể dục bằng số cách chọn 5 trong 7 em nam và bằng $C_7^5 = 21$.
– Trường hợp 2: Trong 5 em được chọn có đúng 1 học sinh nữ.
Lúc này số cách chọn là: $C_3^1.C_7^4 = 105$.

Do đó số cách chọn nhóm 5 em thỏa mãn yêu cầu bài toán là:
105 + 21 = 126 (cách).

II. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{A^4_{n+4}}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n} < 0$ là:

   (A) $S = \{1,2,3\}$; (B) $S = \{1,3,4\}$; (C) $S = \{3,4\}$; (D) $S = \{1,2,\}$.

2. Tập nghiệm S của phương trình $C^1_x + C^2_x + C^3_x = \frac{7}{2}x$ là:

   (A) $S = \{4,3,2\}$; (B) $S = \{4,3\}$; (C) $S = \{4\}$; (D) $S = \varnothing$.

3. **Đội tuyển học sinh giỏi của một trường PTTH gồm có 18 em, trong đó 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 học sinh trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất 1 em được chọn.**

   (A) 41181 ; (B) 41811 ; (C) 41118 ; (D) 84111.

4. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3,4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3.

   (A) 192 ; (B) 129 ; (C) 219 ; (D) 921.

5. Giá trị của biểu thức $M = \frac{A^4_{n+1} + 3A^3_n}{(n+1)!}$ khi n thỏa mãn đẳng thức:

   $C^2_{n+1} + 2C^2_{n+2} + 2C^2_{n+3} + C^2_{n+4} = 149$ (n nguyên dương) là:

   (A) 3,4 ; (B) 4,3 ; (C) $\frac{3}{4}$; (D) $\frac{4}{3}$.

III. Đáp án:

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(D)	(C)	(B)	(A)	(C)

§3. NHỊ THỨC NIU – TƠN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức nhị thức Niu – tơn:

- $(a+b)^n = C^0_n a^n + C^1_n a^{n-1}b + \ldots + C^k_n a^{n-k}b^k + \ldots + C^n_n b^n$.
- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C^k_n a^{n-k} b^k$.

2. Một vài đặc điểm của công thức:

a) Có tất cả n + 1 số hạng trong công thức.
b) Tổng các số mũ của a và b bằng số mũ của nhị thức và bằng n.

c) Số hạng tổng quát có dạng:

$$T_{k+1} = C_n^k.a^{n-k}.b^k \ (k = 0,\ 1,\ .....,\ n).$$

d) Các hệ số của nhị thức cách đều hai số hạng đầu và cuối bằng nhau vì $C_n^k = C_n^{n-k}$.

3. Áp dụng nhị thức Niu – tơn cho a = b = 1 và a = 1, b = –1, ta có:

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$$

$$0 = (1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^k.C_n^k + ... + (-1)^n.C_n^n$$

4. Tam giác Pa – xcan.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 17: Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển $(2x - 3y)^{200}$.

Giải

Viết khai triển dưới dạng:

$$(2x-3y)^{200} = \sum_{k=0}^{200} C_{200}^k.(2x)^{200-k}(-3y)^k = \sum_{k=0}^{200}(-1)^k.C_{200}^k.2^{200-k}.3^k.x^{200-k}.y^k$$

Hệ số của $x^{101}y^{99}$ chính là: $(-1)^k.C_{200}^k.2^{200-k}.3^k$ với $\begin{cases} 200-k=101 \\ k=99 \end{cases}$

Từ đây suy ra hệ số của $x^{101}y^{99}$ là: $-C_{200}^{99}.2^{101}.3^{99}$.

Bài 18: Tính hệ số của x^5y^8 trong khai triển $(x+y)^{13}$.

Giải

Ta có $(x+y)^{13} = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k.x^{13-k}.y^k$

Do đó hệ số của x^5y^8 là: C_{13}^k với $\begin{cases} 13-k=5 \\ k=8 \end{cases} \Leftrightarrow k = 8$

Hay hệ số của x^5y^8 là: $C_{13}^8 = 1287$.

Bài 19: Tính hệ số của x^7 trong khai triển $(1 + x)^{11}$.

Giải

Ta có $(1+x)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k.x^k$

Do đó hệ số của x^7 chính là $C_{11}^7 = 330$.

Bài 20: Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $(2 - x)^{19}$.

Giải

Ta có $(2-x)^{19} = \sum_{k=0}^{19} C_{19}^k.2^{19-k}.(-1)^k.x^k$

Do đó hệ số của x^9 là: $(-1)^9.C_{19}^9.2^{10} = -94\,595\,072$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho f(x) = $(1 + 2x)^{20}$, sau khi khai triển f(x) thành đa thức ta có:

$f(x) = a_{20}.x^{20} + a_{19}.x^{19} + \dots + a_1x + a_0$. Đặt:

$S_1 = a_0 + a_1 + \dots + a_{19} + a_{20}$

$S_2 = a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1).a_k + \dots + a_{20}$

a) Giá trị của S_1 là:

(A) 20^3 ; (B) 3^{20} ; (C) 1 ; (D) –1.

b) Giá trị của S_2 là:

(A) –1 ; (B) –2 ; (C) 2 ; (D) 1.

2. Số nguyên dương n thỏa mãn đẳng thức:

$C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^nC_n^n = 243$ là:

(A) n = 5 ; (B) n = 6 ; (C) n = 7 ; (D) n = 8.

3. Cho khai triển: $(1+x)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + \dots + a_nx^n$. Biết rằng tồn tại k nguyên dương $(1 \le k \le n-1)$ sao cho: $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$. Thế thì giá trị của n là:

(A) 8 ; (B) 9 ; (C) 10 ; (D) 11.

4. Gọi $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ là các hệ số của khai triển:

$(x+1)^{10}.(x+2) = x^{11} + a_1x^{10} + a_2x^9 + \dots + a_{11}$. Thế thì hệ số của a_5 sẽ bằng:

(A) 276 ; (B) 672 ; (C) 627 ; (D) 762.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1a	1a	2	3	4
Đáp án	(B)	(D)	(A)	(C)	(B)

LUYỆN TẬP

I. Bài tập căn bản

Bài 21: Khai triển $(3x + 1)^{10}$ cho tới x^3.

Giải

Ta có $(3x+1)^{10} = (1+3x)^{10} = C_{10}^0.1 + C_{10}^1.3x + C_{10}^2 9x^2 + C_{10}^3.27x^3 \dots$

$= 1 + 30x + 405x^2 + 324x^3 + \dots$

Bài 22: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển của $(3 - 2x)^{15}$.

Giải

Ta có: $(3\text{-}2x)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k.3^{15-k}.(-2x)^k = \sum_{k=0}^{15} (-1)^k.C_{15}^k.2^k.3^{15-k}.x^k$.

Từ khai triển trên ta suy ra hệ số của x^7 là:

$T_8 = (-1)^7 C_{15}^7.2^7.3^8 = -C_{15}^7.2^7.3^8 = -5\ 404\ 164\ 480.$

Bài 23 Tính hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$.

Giải

Ta có: $(x^3 + xy)^{15} = x^{15}(x^2 + y)^{15} = x^{15}.\sum_{k=0}^{15} C_{15}^k.x^{30-2k}y^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k.x^{45-2k}y^k$

Từ khai triển ta thấy đơn thức $x^{25}y^{10}$ trong khai triển ứng với giá trị k thỏa mãn $\begin{cases} 45 - 2k = 25 \\ k = 10 \end{cases} \Leftrightarrow k = 10$ nên hệ số của $x^{25}y^{10}$ là: $C_{15}^{10} = 3003$.

Bài 24 Biết rằng hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm n.

Giải

Ta có: $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^{n-k}.\left(\frac{1}{4}\right)^k.(-1)^k$

Từ đấy hệ số của x^{n-2} trong khai triển là: $C_n^2.(-1)^2.\frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}C_n^2$.

Mặt khác, theo giả thiết, ta có: $\frac{1}{16}C_n^2 = 31$

$\Leftrightarrow C_n^2 = 31.16 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 31.16$

$\Leftrightarrow n^2 - n - 992 = 0 \Leftrightarrow n = 32$ (n = – 31 loại).

II. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho khai triển $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$. Giá trị của n bằng bao nhiêu biết rằng tổng của các hệ số thứ nhất, thứ hai, thứ ba trong khai triển bằng 11.

(A) n = 3 ; (B) n = 4 ; (C) n = 5 ; (D) n = 6.

2. Hệ số thứ ba trong khai triển $\left(x - \frac{1}{3}\right)^n$ bằng 5. Hệ số của số hạng chứa x^5 là:

(A) $\frac{252}{243}$; (B) $\frac{243}{252}$; (C) $\frac{225}{243}$; (D) $\frac{243}{225}$.

3. Hệ số của x^7 trong khai triển thành đa thức của $(2 - 3x)^{2n}$ với n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$ là:

(A) 2 099 518 ; (B) –2 099 519 ; (C) –2 099520 ; (D) 2 099521.

4. Hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $\left[1 + x^2(1 - x)\right]^8$ là:

(A) 283 ; (B) 238 ; (C) 832 ; (D) 823.

5. Tổng các hệ số của khai triển $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^n$ (n là số nguyên dương) bằng 1024. Thế thì hệ số của x^6 trong khai triển đó là:

(A) 120 ; (B) 201 ; (C) 310 ; (D) 210.

III. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(A)	(C)	(B)	(D)

§4. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phép thử và không gian mẫu:

a) Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà:

- Kết quả của nó không thể biết trước được.
- Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của nó. Tập hợp này được gọi là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử.

b) Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và được kí hiệu là Ω.

2. Biến cố và xác suất của biến cố:

a) Có những hiện tượng ta biết chắc nó sẽ xảy ra, cũng có những hiện tượng ta không thể biết nó có xảy ra hay không ? Các hiện tượng trên gọi là biến cố.

b) Biến cố A liên quan đến phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tùy thuộc vào kết quả của T.

Mỗi kết quả của T làm cho A xảy ra, được gọi là một kết quả thuận lợi của A. Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu là Ω_A.

Biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử T được gọi là biến cố chắc chắn. Biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử T được gọi biến cố không thể.

c) Định nghĩa xác suất:

• Định nghĩa cổ điển: Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố liên quan với phép thử T và Ω_A là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A thì xác suất của A là một số, kí hiệu là P(A), được xác định bởi công thức:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$$

Chú ý: $P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$; $0 \le P(A) \le 1$ với mọi biến cố A.

- Định nghĩa thống kê của xác suất

Số lần xuất hiện biến cố A được gọi là tần số của A trong N lần thực hiện phép thử T.

Tỉ số giữa tần số của A với số N được gọi là tần suất của A trong N lần thực hiện phép thử T.

Khi số thử N càng lớn thì tần suất của A càng gần với một số xác định, số đó được gọi là xác suất của A theo nghĩa thống kê.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 25: Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 50.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi A là biến cố "số được chọn là số nguyên tố". Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi của A.

c) Tính xác suất của A.

d) Tìm xác suất để số được chọn nhỏ hơn 4.

Giải

a) Không gian mẫu Ω là tập hợp các số nguyên từ 1 cho đến 50 hay: $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 49, 50\}$

b) Ta có $\Omega_A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$

c) Ta có $|\Omega_A| = 15$ và $|\Omega| = 50$. Do vậy:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

d) Gọi B là biến cố "số được chọn nhỏ hơn 4". Khi đó, ta có:

$\Omega_B = \{1, 2, 3\}$. Do vậy: $P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{3}{50} = 0,06$.

Bài 26: Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 9. Tính xác suất để:

a) Số được chọn là số nguyên tố.

b) Số được chọn chia hết cho 3.

Giải

Ta có không gian mẫu là: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ nên $|\Omega| = 8$.

Gọi A là biến cố "số được chọn là số nguyên tố". B là biến cố "số được chọn chia hết cho 3". Rõ ràng ta có được:

$\Omega_A = \{2, 3, 5, 7\}$; $\Omega_B = \{3, 6\}$. $\Rightarrow |\Omega_A| = 4, |\Omega_B| = 2$

Do đó: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = 0,5$

$$P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

Bài 27: Danh sách lớp thường được đánh số từ 1 đến 30. Hường có số thứ tự là 12. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp.

a) Tính xác suất để Hường được chọn.

b) Tính xác suất để Hường không được chọn.

c) Tính xác suất để một bạn có thứ tự nhỏ hơn thứ tự của Hường được chọn.

Giải

Gọi Ω là không gian mẫu. Do danh sách lớp có 30 học sinh nên $|\Omega| = 30$.

Gọi A là biến cố "Hường được chọn", B là biến cố: "Hường không được chọn", dễ thấy $|\Omega_A| = 1$, $|\Omega_B| = 29$. Do đó

$$P(A) = \frac{1}{30}\ ;\ P(B) = \frac{29}{30}.$$

Gọi C là biến cố "Một bạn có số thứ tự nhỏ hơn số thứ tự của Hường được chọn". Vì Hường có số thứ tự 12 nên $|\Omega_C| = 11$. Vì vậy

$$P(C) = \frac{|\Omega_C|}{|\Omega|} = \frac{11}{30}.$$

Bài 28: Gieo 2 con súc sắc cân đối.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi A là biến cố " Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc là nhỏ hơn hoặc bằng 7 ". Liệt kê các kết quả thuận lợi cho A. Tính P(A).

c) Cũng hỏi như trên với các biến cố B: "có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm", và C: "có đúng một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm".

Giải

a) Không gian mẫu: $\Omega = \{(i,j) \setminus i,j = 1,2,3,4,5,6\}$

Với i là số chấm xuất hiện trên mặt con súc sắc thứ nhất, j là số chấm xuất trên mặt của con súc sắc thứ 2.

Từ đó ta có: $|\Omega| = 36$.

b) Từ giả thiết ta có:

$$\Omega_A = \{(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(3;1),(3;2);$$
$$(3;3),(4;1),(4;2),(5;1),(1;6),(3;4),(4;3),(5;2),(6;1),(2;5)\}.$$

$\Rightarrow |\Omega_A| = 21$

Do đó: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{21}{36} = \dfrac{7}{12}$.

c) Từ giả thiết ta có:

$\Omega_B = \{(1;6),(2;6),(3;6),(4;6),(5;6),(6;6),(6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5)\}$

$\Omega_C = \{(1;6),(2;6),(3;6),(4;6),(5;6),(6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5)\}$.

Do vậy $P(B) = \dfrac{11}{36}$; $P(C) = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

Bài 29: Chọn ngẫu nhiên 5 người có tên trong danh sách 20 người được đánh số từ 1 đến 20. Tính xác suất để 5 người được chọn có số thứ tự không lớn hơn 10 (tính chính xác đến hàng phần nghìn).

Giải

Gọi Ω là không gian mẫu ta có: $|\Omega| = C_{20}^5 = 15504$.

Số cách chọn 5 người trong 10 người đầu tiên (10 người có thứ tự từ 1 đến 10) là $C_{10}^5 = 252$.

Hay ta có xác suất của biến cố này là:

$P = \dfrac{252}{15504} \approx 0,016$ (đã làm tròn đến hàng phần nghìn).

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 30. Gọi A là biến cố: "số được chọn chia hết cho 4 hoặc chia hết cho 7". Thế thì xác suất P(A) của biến cố A là:

(A) 0,3 ; (B) $\dfrac{1}{3}$; (C) 0,33 ; (D) 0,2.

2. Trong một cái hộp có chứa 10 quả cầu trắng và 8 quả cầu đỏ. Giả sử kích thước và trọng lượng các quả cầu đều như nhau. Lấy ngẫu nhiên ra 5 quả cầu. Thế thì xác suất của biến cố: "trong 5 quả lấy ra có đúng 3 quả cầu đỏ" là:

(A) $\dfrac{5}{17}$; (B) $\dfrac{6}{17}$; (C) $\dfrac{7}{17}$; (D) $\dfrac{8}{17}$.

3. Một hộp bóng đèn có 12 bóng, trong đó có 7 quả bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng đèn:

a) Xác suất để lấy được 3 bóng là tốt là:

(A) $\dfrac{11}{44}$; (B) $\dfrac{9}{44}$; (C) $\dfrac{7}{44}$; (D) $\dfrac{5}{44}$.

b) Xác suất của biến cố: "có ít nhất 2 bóng tốt" là:

(A) $\dfrac{4}{11}$; (B) $\dfrac{5}{11}$; (C) $\dfrac{6}{11}$; (D) $\dfrac{7}{11}$.

c) Xác suất của biến cố: "có ít nhất 1 bóng tốt" là:

(A) $\frac{10}{11}$; (B) $\frac{21}{22}$; (C) $\frac{19}{22}$; (D) $\frac{9}{11}$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3a	3b	3c
Đáp án	(B)	(A)	(C)	(D)	(B)

LUYỆN TẬP

I. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 30: Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh có tên trong danh sách được đánh số thứ tự từ 001 đến 199. Tính xác suất để 5 học sinh này có số thứ tự:

a) Từ 001 đến 099 (tính chính xác đến hàng phần nghìn);

b) Từ 150 đến 199 (tính chính xác đến hàng phần vạn).

Giải

Số cách chọn 5 học sinh bất kì trong 199 học sinh là C_{199}^5.

Số cách chọn 5 học sinh có số thứ tự từ 001 đến 099 là C_{99}^5.

Số cách chọn 5 học sinh có số thứ tự từ 150 đến 199 là C_{50}^5.

a) Xác suất của biến cố: "5 học sinh chọn ra có số thứ tự từ 001 đến 099" là: $P_1 = \frac{C_{99}^5}{C_{199}^5} \approx 0,029$. (chính xác đến hàng phần nghìn).

b) Xác suất của biến cố "5 học sinh chọn ra có số thứ tự từ 150 đến 199" là: $P_2 = \frac{C_{50}^5}{C_{199}^5} \approx 0,0009$ (chính xác đến hàng phần vạn).

Bài 31: Một túi đựng 4 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu. Tính xác suất để trong 4 quả cầu đó có cả quả màu đỏ và màu xanh.

Giải

Từ giả thiết ta có tổng cộng 10 quả cầu (cả đỏ và xanh).

Số cách chọn 4 quả cầu trong 10 quả là: $C_{10}^4 = 210$.

Có những trường hợp sau trong 4 quả cầu lấy ra thỏa mãn yêu cầu:

* Trường hợp 1: 1 quả cầu đỏ, 3 quả cầu xanh.

Số cách chọn được là: $C_4^1.C_6^3 = 80$.

* Trường hợp 2: 2 quả đỏ, 2 quả xanh:

Số cách chọn được là: $C_4^2.C_6^2 = 90$.

* Trường hợp 3: 3 quả đỏ, 1 quả xanh.

Số cách chọn được là: $C_4^1.C_6^1 = 24$.

Tổng số cách chọn 4 quả cầu có cả màu đỏ và màu xanh là:

$80 + 90 + 24 = 194$.

Xác suất của biến cố A: "4 quả cầu lấy ra có cả đỏ lẫn xanh" là:

$$P(A) = \frac{194}{210} = \frac{97}{105}.$$

Bài 32: Chiếc kim của bánh xe trong trò chơi: "Chiếc nón kì diệu" có thể dừng lại một trong 7 vị trí với khả năng như nhau. Tính xác suất để trong ba lần quay, chiếc kim của bánh xe đó lần lượt dừng lại ở 3 vị trí khác nhau.

Giải

Để cho tiện ta quy ước rằng 7 vị trí mà kim có thể dừng lại được đánh số lần lượt từ 1 đến 7. Khi đó không gian mẫu sẽ là:

$\Omega = \{(i; j; k) \setminus i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}$.

Ở đó i là lần quay 1, kim dừng lại ở vị trí i;

j là lần quay 2, kim dừng lại ở vị trí j;

k là lần quay 3, kim dừng lại ở vị trí k.

Ta dễ tính được $\Omega = 7.7.7 = 343$

Gọi A là biến cố "3 lần quay chiếc kim của bánh xe dừng ở vị trí khác nhau". Khi đó: $\Omega = \{(i; j; k) \setminus i, j, k \in \{1, 2, ..., 7\}; i \neq j; j \neq k; i \neq k\}$.

Có 7 cách chọn i, 6 cách chọn j và 5 cách chọn k. Do vậy

$|\Omega| = 7.6.5 = 210$

Vì thế: $P(A) = \frac{210}{343} = \frac{5.6.7}{7^3} = \frac{30}{49}$.

Bài 33 Gieo đồng thời 2 con súc sắc cân đối. Tính xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc hơn kém nhau 2.

Giải

Để cho tiện ta gọi 2 con súc sắc là A và B. Khi đó không gian mẫu là:

$\Omega = \{(i; j) \setminus i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.

Ở đó i là số chấm xuất hiện khi gieo con súc sắc A, j là số chấm xuất hiện khi gieo con súc sắc B.

Dễ thấy: $|\Omega| = 6.6 = 36$.

Gọi A là biến cố: "Số chấm xuất hiện trên 2 con súc sắc hơn kém nhau 2". Khi đó $\Omega_A = \{(i; i+2) \setminus i = 1, 2, 3, 4\} \cup \{(k+2; k) \setminus k = 1, 2, 3, 4\}$

$\Rightarrow |\Omega_A| = 8$. Do vậy $P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

II. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Một hộp có 20 viên bi, trong đó có 12 viên màu đỏ và 8 viên màu xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi:

a) Xác suất để cả 3 viên bi đều màu đỏ là:

(A) $\frac{25}{57}$; (B) $\frac{13}{57}$; (C) $\frac{11}{57}$; (D) $\frac{8}{57}$.

b) Xác suất để 3 viên bi đều màu xanh là:

(A) $\frac{14}{285}$; (B) $\frac{17}{285}$; (C) $\frac{19}{285}$; (D) $\frac{21}{285}$.

c) Xác suất để có ít nhất 1 viên bi màu đỏ là:

(A) $\frac{217}{285}$; (B) $\frac{271}{285}$; (C) $\frac{283}{285}$; (D) $\frac{259}{285}$.

2. Trong 100 vé số có đúng 1 vé số trúng 100 000 đồng, 5 vé số trúng 50 000 đồng và 10 vé trúng 10 000 đồng. Một người mua ngẫu nhiên 3 vé số.

a) Xác suất của biến cố: "Người đó trúng đúng 30 000 đồng" là:

(A) $\frac{5}{2695}$; (B) $\frac{4}{2695}$; (C) $\frac{3}{2695}$; (D) $\frac{2}{2695}$.

b) Xác suất của biến cố: "Người đó trúng nhiều nhất 50 000 đồng" là:

(A) $\frac{1783}{5390}$; (B) $\frac{1387}{5390}$; (C) $\frac{1873}{5390}$; (D) $\frac{3187}{5390}$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1a	1b	1c	2a	2b
Đáp án	(C)	(A)	(B)	(D)	(C)

§5. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Quy tắc cộng xác suất:

a) Biến cố hợp: Cho k biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Biến cố "có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ xảy ra", kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$, được gọi là hợp của k biến cố đó.

b) Biến cố xung khắc: Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

c) Quy tắc cộng xác suất:

Nếu k biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là đôi một xung khắc thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k).$$

d) Biến cố đối: Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "không xảy ra A", ký hiệu là $\overline{A}$, được gọi là biến cố đối của A.

Ta có công thức sau: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. Quy tắc nhân xác suất:

a) Biến cố giao: Cho hai biến cố A và B. Biến cố "cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu là A.B, được gọi là giao của hai biến cố A và B.

Nếu Ω_A, Ω_B là tập các kết quả của A và B thì

$\Omega_{AB} = \Omega_A \cap \Omega_B$

Bằng cách tương tự ta cũng định nghĩa được cho giao của nhiều hơn hai biến cố.

b) Biến cố độc lập: Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Nhận xét: Nếu A, B độc lập thì $\overline{A}$, $\overline{B}$ độc lập.

c) Quy tắc nhân xác suất: Nếu A, B độc lập thì $P(A.B) = P(A).P(B)$.

Công thức này có thể mở rộng cho nhiều biến cố đôi một độc lập với nhau.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 34: Gieo 3 đồng xu cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để:

a) Cả ba đồng xu đều sấp;

b) Có ít nhất một đồng xu sấp;

c) Có đúng một đồng xu sấp.

Giải

Kí hiệu rằng: nếu đồng xu ngửa ta viết N.

Nếu đồng xu nằm sấp ta viết S.

Khi đó ta có thể mô tả không gian mẫu như sau

$\Omega = \{S;N;N);(S;N;S);(S;S;N);(S;S;S);(N;S;S);(N;S;N);(N;N;S);(N;N;N)\}$

ở đó chẳng hạn (S; N; N) là lần 1 sấp; lần 2, lần 3 ngửa.

Từ đây suy ra $|\Omega| = 8$.

a) Xác suất để cả 3 đồng xu đều sấp là: $P_1 = \dfrac{1}{8}$.

b) Gọi B là biến cố: "Có ít nhất một đồng xu sấp". Khi đó

$\Omega_B = \Omega \setminus \{(N;N;N)\} \Rightarrow |\Omega_B| = 7$ và do vậy $P_2 = P(B) = \dfrac{7}{8}$.

c) Gọi C là biến cố có đúng là một đồng xu sấp, ta có:

$\Omega_C = \{S;N;N);(N;S;S);(N;N;S)\} \Rightarrow |\Omega_C| = 3$

Do đó $P_3 = P(C) = \dfrac{3}{8}$.

Bài 35: Xác suất bắn trúng hồng tâm của một người bắn cung là 0,2. Tính xác suất để trong 3 lần bắn độc lập:

a) Người đó bắn trúng hồng tâm đúng một lần;

b) Người đó bắn trúng hồng tâm ít nhất một lần.

Giải

Ta gọi A là biến cố: “ lần 1 bắn trúng hồng tâm”;

B là biến cố: “lần 2 bắn trúng hồng tâm”;

C là biến cố: “lần 3 bắn trúng hồng tâm”.

Đương nhiên 3 biến cố A, B, C đôi một độc lập. Do vậy bộ ba biến cố $A\overline{B}\,\overline{C}$; $\overline{A}\,\overline{B}C$ và $\overline{A}B\overline{C}$ cũng đôi một độc lập.

Gọi M là biến cố : “Trong 3 lần bắn chỉ bắn hồng tâm đúng một lần”.

Ta có: $M = A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$.

Hiển nhiên các biến cố $A.\overline{B}.\overline{C}$; $\overline{A}.B.\overline{C}$; $\overline{A}.\overline{B}.C$ độc lập.

Do vậy $P(M) = P\left(\overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup A\overline{B}\,\overline{C}\right)$

$$= P\left(\overline{A}\right).P(B).P\left(\overline{C}\right) + P\left(\overline{A}\right).P\left(\overline{B}\right).P(C) + P(A).P\left(\overline{B}\right).P\left(\overline{C}\right)$$

$$= 0,8.0,2.0,8 + 0,8.0,8.0,2 + 0,2.0,8.0,8$$

$$= 3.0,128 = 0,384$$

Gọi N là biến cố: “Người đó bắn trúng hồng tâm ít nhất một lần”.

Ta suy ra: $\overline{N}$ là biến cố “Người đó không bắn trúng hồng tâm lần nào”.

Khi đó $\overline{N} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} \Rightarrow P\left(\overline{N}\right) = P\left(\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}\right)$.

Vì $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ độc lập đôi một nên:

$P\left(\overline{N}\right) = P\left(\overline{A}\right).P\left(\overline{B}\right).P\left(\overline{C}\right) = 0,8.0,8.0,8 = 0,512$.

Vì vậy $P(N) = 1 - 0,512 = 0,488$.

Bài 36: Gieo hai đồng xu A và B một cách độc lập. Đồng xu A chế tạo cân đối, đồng xu B chế tạo không cân đối nên xác suất xuất hiện mặt sấp gấp 3 lần xác suất xuất hiện mặt ngửa. Tính xác suất để:

a) Khi gieo đồng xu một lần thì cả hai đồng xu đều ngửa;

b) Khi gieo hai đồng xu hai lần thị hai lần cả hai đồng xu đều ngửa.

Giải

a) Gọi M là biến cố: “đồng xu A xuất hiện mặt ngửa”.

Do đồng xu A là cân đối nên: $P(M) = P\left(\overline{M}\right) = 0,5$.

Gọi N là biến cố: “đồng xu B xuất hiện mặt ngửa”.

Do giả thiết ta có: $P\left(\overline{N}\right) = 3P(N) = 1 - P(N) \Leftrightarrow P(N) = 0,25$.

Khi đó biến cố: “cả hai đồng xu đều ngửa” chính là M.N.

Mặt khác M, N là độc lập nên:

$P(M) \, . \, P(N) = P(M.N) = 0,5 \, . \, 0,25 = 0,125.$

b) Gọi E là biến cố: "Gieo 2 đồng xu lần 1, chúng đều ngửa".

F là biến cố: "Gieo 2 đồng xu lần 2, chúng đều ngửa".

Theo câu a) ta có: $P(E) = P(F) = 0,125.$

Mặt khác E, F là các biến cố độc lập, mà EF là biến cố: "Gieo hai đồng xu hai lần thì cả hai lần cả hai đồng xu đều ngửa" nên xác suất của biến cố này là: $P = P(E.F) = P(E) \, . \, P(F) = (0,125)^2 = \frac{1}{64}.$

Bài 37 Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có 5 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng. Một học sinh không học bài nên làm bài bằng cách với mỗi câu đều chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Tính xác suất để học sinh đó trả lời không đúng cả 10 câu (tính chính xác đến hàng phần vạn).

Giải

Gọi A_k là biến cố: "học sinh trả lời không đúng câu thứ k" ($k = 1, 2, \ldots, 10$).

Khi đó biến cố A: "học sinh trả lời không đúng cả 10 câu" sẽ là $A = A_1A_2 \ldots A_{10}$. Mặt khác vì các biến cố A_i, A_j là độc lập với $i \neq j$ nên:

$P(A) = P(A_1) \, . \, P(A_2) \ldots P(A_{10}).$

Vì mỗi câu thứ k có 5 phương án trả lời trong đó chỉ có một phương án đúng nên $P(A_k) = 0,8$. Vì vậy: $P(A) = \underbrace{0,8.0,8.\ldots.0,8}_{10 \text{ thừa số } 0,8} = (0,8)^{10} \approx 0,1074.$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Có 2 bình, mỗi bình chứa 3 viên bi chỉ khác nhau về màu: một bi xanh, một bi vàng, một bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên mỗi bình một viên bi.

a) Xác suất để "cả hai viên bi lấy ra đều là bi xanh" là:

(A) [illegible] ; (B) $\frac{1}{5}$; (C) $\frac{1}{6}$; (D) $\frac{1}{9}$.

b) Xác suất để "hai viên bi lấy ra là khác màu" là:

(A) [illegible] ; (B) $\frac{2}{3}$; (C) 0,33 ; (D) 0,66.

2. Một đơn vị vận tải có 10 xe ô tô, trong đó có đúng 6 xe tốt, các xe còn lại đều không tốt. Điều một cách ngẫu nhiên 3 xe đi công tác. Xác suất để trong 3 xe có ít nhất một xe tốt là:

(A) $\frac{19}{20}$; (B) $\frac{14}{15}$; (C) $\frac{9}{10}$; (D) $\frac{13}{15}$.

3. Hai cầu thủ bóng đá sút phạt 11 m, mỗi người đá 1 lần với xác suất sút bóng vào lưới lần lượt là 0,8 và 0,7.

a) Xác suất để cả hai cầu thủ sút bóng không vào lưới là:

(A) 056 ; (B) 0,65 ; (C) 0,12 ; (D) 0,21.

b) Xác suất để ít nhất có một cầu thủ làm bàn là:

(A) 0,94 ; (B) 0,93 ; (C) 0,92 ; (D) 0,91.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1a	1b	2	3a	3b
Đáp án	(D)	(B)	(A)	(C)	(A)

LUYỆN TẬP

I. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 38: Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 12 thẻ đánh số từ 1 đến 12. Từ mỗi hòm rút ngẫu nhiên một thẻ. Tính xác suất để trong 2 thẻ rút ra có ít nhất 1 thẻ đánh số 12.

Giải

Dễ thấy số phần tử của không gian mẫu là:

$|\Omega| = 12.12 = 144$.

Vì: $\Omega = \{(i;j) \setminus i, j \in \{1,2,....,12\}\}$, ở đó, chẳng hạn bộ (3; 5) là rút ở hòm một được thẻ số 3, hòm hai được thẻ số 5.

Gọi A là biến cố: "Trong hai thẻ rút ra không có thẻ nào đánh số 12". Rõ ràng biến cố A và biến cố B: "trong hai thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 12" là đối nhau. Do đó P(B) = 1 − P(A).

Mặt khác $\Omega_A = \{(i;j) \setminus i, j \in \{1,2,3,....,11\}\}$ nên $|\Omega_A| = 11.11 = 121$.

Do vậy ta được: $P(B) = 1 - \frac{121}{144} = \frac{23}{144}$.

Bài 39: Cho hai biến cố A và B với P(A) = 0,3; P(B) = 0,4 và P(A.B) = 0,2.

Hỏi hai biến cố A, B có :

a) Xung khắc không ?

b) Độc lập với nhau hay không ?

Giải

Gọi Ω là không gian mẫu và $|\Omega| = n$.

Gọi E, F là các biến cố bất kì với $|\Omega_E| = m$, $|\Omega_F| = k$.

Nếu $\Omega_E \cap \Omega_F = \varnothing$ thì ta có:

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$ (vì $P(EF) = 0$).

Nếu $\Omega_E \cap \Omega_F \neq \varnothing$ thì $|\Omega_E \cap \Omega_F| = t$. Khi đó:

$|\Omega_E \cup \Omega_F| = |\Omega_E| + |\Omega_F| - |\Omega_E \cap \Omega_F| = m + k - t$

Do đó $P(E \cup F) = \frac{m+k-t}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{t}{n} = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

Như vậy trong mọi trường hợp ta luôn có:
$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$.

Do đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,3 + 0,4 - 0,2 = 0,5$

Ta suy ra $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$ (1).

Giả sử A và B xung khắc. Theo công thức cộng xác suất thì:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (2).

Rõ ràng (2) là một mâu thuẫn với (1). Mâu thuẫn này chứng tỏ A và B không xung khắc.

b) Giả sử phản chứng rằng A và B độc lập. Khi đó, ta có:

$$P(A.B) = P(A).P(B) \Leftrightarrow 0,2 = 0,3 + 0,4 \Leftrightarrow 0,2 = 0,7 .$$

Đây là một mâu huẫn, mâu thuẫn này chứng tỏ rằng A, B không thể độc lập với nhau.

Bài 40: Trong một trò chơi điện tử, xác suất để An thắng một trận là 0,4 (không có hòa). Hỏi An phải chơi tối thiểu bao nhiêu trận để xác suất An thắng ít nhất một trận trong loạt chơi đó lớn hơn 0,95 ?

Giải

Giả sử rằng An đã chơi n trận ($n > 1$). Gọi A_k là biến cố: "An thắng ở trận thứ k". $1 \le k \le n$. Ta có $P(A_k) = 0,4$ nên $P\left(\overline{A_k}\right) = 0,6$.

Gọi A là biến cố: " An không thắng trận nào trong n trận đã chơi".

Rõ ràng: $A = \overline{A_1}\,\overline{A_2}....\overline{A_n}$

Vì A_i và A_j độc lập $(i \neq j)$ nên $\overline{A_i}$ và $\overline{A_j}$ cũng độc lập.

Do đó: $P(A) = P\left(\overline{A_1}\right).P\left(\overline{A_2}\right)....P\left(\overline{A_n}\right) = (0,6)^n$.

Mặt khác, biến cố B: "An thắng ít nhất một trận trong loạt chơi", là biến cố xung khắc của biến cố A nên: $P(B) = 1 - P(A) = 1 - (0,6)^n$.

Theo giả thiết, ta có: $P(B) > 0,95 \Leftrightarrow 1 - (0,6)^n > 0,95 \Leftrightarrow 0,05 > (0,6)^n$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^n < \frac{1}{20} \Leftrightarrow n > 5 .$$

Do đó An phải chơi tối thiểu là 6 trận.

Bài 41: Gieo hai con súc sắc cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc bằng 8.

Giải

Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có: $\Omega = \{(i;j) \backslash i, j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$.

Do vậy $|\Omega| = 36$.

Gọi A là biến cố: "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc là 8". Ta có: $\Omega_A = \{(2;6),(3;5),(4;4),(5;3),(6;2)\}$.

Do vậy $|\Omega_A| = 5$.

Vì thế: $P(A) = \dfrac{5}{36}$.

Bài 42: Gieo ba con súc sắc cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của ba con súc sắc bằng 9.

Giải

Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có: $\Omega = \{(i;j;k) \setminus i,j,k \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$.

Nên $|\Omega| = 6.6.6 = 216$.

Trước hết ta tìm 3 số nguyên dương i, j, k có tổng bằng 9 và $i,j,k \le 6$.

Trường hợp 1: 3 số đó là: 6, 1, 2 ;
Trường hợp 2: 3 số đó là: 5, 2, 2 ;
Trường hợp 3: 3 số đó là: 5, 3, 1 ;
Trường hợp 4: 3 số đó là: 4, 4, 1 ;
Trường hợp 5: 3 số đó là: 4, 3, 2 ;
Trường hợp 6: 3 số đó là: 3, 3, 3 .

- Trong trường hợp 1, trường hợp 3, trường hợp 5. Mỗi một trường hợp đều có 3! = 6 bộ số (i; j; k) mà i + j + k = 9.

Do đó ở ba trường hợp này có 18 bộ số.

- Ở trường hợp 2 và trường hợp 4. Mỗi một trường hợp chỉ có 3 bộ (i; j; k) mà i + j + k = 9.
- Ở trường hợp 6 thì có đúng 1 bộ (3; 3; 3) thỏa mãn.

Vậy tổng cộng có 18 + 6 + 1 = 25 bộ số (i; j; k) thỏa mãn yêu cầu.

Vậy xác suất của biến cố thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $P = \dfrac{25}{216}$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Hai xạ thủ cùng bắn mỗi người một phát đạn vào bia. Xác suất trúng đích của người thứ nhất là 0,9 ; của người thứ hai là 0,7.

a) Xác suất của biến cố: "cả hai phát đều trúng đích" là:

(A) 0,36 ; (B) 0,63 ; (C) 0,3 ; (D) 0,27.

b) Xác suất của biến cố: "ít nhất một phát trúng đích" là:

(A) 0,97 ; (B) 0,79 ; (C) 0,63 ; (D) 0,36.

c) Xác suất của biến cố: "đúng một phát trúng đích" là:

(A) 0,43 ; (B) 0,42 ; (C) 0,34 ; (D) 0,24.

2. Gọi M là tập hợp gồm các số có hai chữ số khác nhau được thành lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Lấy ngẫu nhiên 2 phần tử của tập M.

a) Xác suất để ít nhất một trong hai phần tử đó chia hết cho 6 là:

(A) $\dfrac{6}{29}$; (B) $\dfrac{7}{29}$; (C) $\dfrac{8}{29}$; (D) $\dfrac{9}{29}$.

b) Xác suất để ít nhất một trong hai phần tử đó không lớn hơn 45 là:

(A) $\dfrac{75}{87}$; (B) $\dfrac{76}{87}$; (C) $\dfrac{77}{87}$; (D) $\dfrac{78}{87}$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1a	1b	1c	2a	2b
Đáp án	(B)	(A)	(C)	(D)	(B)

§6. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Biến ngẫu nhiên rời rạc: Đại lượng X được gọi là biến ngẫu nhiên rời rạc nếu nó nhận giá trị bằng số thuộc một tập hữu hạn nào đó và giá trị ấy là ngẫu nhiên, không dự đoán trước được.

X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị thuộc tập $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Đặt $p_1 = P(X = x_1)$;.........; $p_n = P(X = x_n)$. Khi đó $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

2. Kì vọng:

* Định nghĩa: Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Kì vọng của X, kí hiệu là E(X), là một số được tính theo công thức: $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$. Ở đó $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. E(X) còn được gọi là giá trị trung bình của X.

3. Phương sai và độ lệch chuẩn:

a) Phương sai: Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là: $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Phương sai của X, kí hiệu là V(X), là một số được tính theo công thức:

$$V(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + ... + (x_n - \mu)^2 p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$

Ở đó $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ và $\mu = E(X)$.

b) Độ lệch chuẩn: Căn bậc hai của phương sai, kí hiệu là $\sigma(X)$, được gọi là độ lệch chuẩn của X, ta có:

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Chú ý: $V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 43 Một cuộc điều tra được tiến hành như sau: Chọn ngẫu nhiên một bạnhọc sinh trên đường và hỏi xem gia đình bạn đó có bao nhiêu người.

Gọi X là số người trong gia đình bạn học sinh đó. Hỏi X có phải là biến ngẫu nhiên rời rạc không? Vì sao?

Giải

Ta thấy X nhận giá trị bằng số thuộc một tập hữu hạn (vì số học sinh và số người trong gia đình học sinh là hữu hạn) và các giá trị đó hoàn toàn ngẫu nhiên ta không thể biết trước được. Do vậy X chính là một biến ngẫu nhiên rời rạc.

Bài 44: Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong số các gia đình có ba con. Gọi X là số con trai trong gia đình đó. Hãy lập bảng phân bố xác suất của X (giả thiết rằng xác suất sinh con trai là 0,5).

Giải

Dễ thấy X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị thuộc tập $\{0,1,2,3\}$.

Đặt $p_0 = P(X = 0)$; $p_1 = P(X = 1)$; $p_2 = P(X = 2)$; $p_3 = P(X = 3)$

Ta gọi A là biến cố: "lần đầu sinh con trai" ;
B là biến cố: "lần thứ 2 sinh con trai" ;
C là biến cố: "lần thứ 3 sinh con trai" .

Dễ thấy A, B, C đôi một độc lập, do đó $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, ABC cũng đôi một độc lập. Ta có: $P(A) = P(B) = P(C) = P(\overline{A}) = P(\overline{B}) = P(\overline{C}) = 0,5$.

Gọi M là biến cố: "cả 3 lần đều sinh con gái". Ta có $M = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$

Vì thế $p_0 = P(X = 0) = P(M) = P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C}) = 0,5.0,5.0,5 = 0,125$.

$$p_1 = P(X = 1) = P\left(A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C\right)$$

$$= P(A).P(\overline{B}).P(\overline{C}) + P(\overline{A}).P(B).P(\overline{C}) + P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(C)$$

$$= 3.0,125 = 0,375.$$

Tương tự: $p_2 = P(X = 2) = P\left(AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC\right) = 0,375$

$$p_3 = P(X = 3) = P(ABC) = P(A).P(B).P(C) = 0,125$$

Do đó bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X là:

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

Bài 45: Số ca cấp cứu ở một bệnh viện vào tối thứ 7 là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,15	0,2	0,3	0,2	0,1	0,05

Biết rằng, nếu có hơn 2 ca cấp cứu thì phải tăng cường thêm bác sĩ trực.

a) Tính xác suất để phải tăng cường thêm bác sĩ trực vào tối thứ bảy.

b) Tính xác suất để có ít nhất một ca cấp cứu vào tối thứ bảy.

Giải

a) Gọi A là biến cố: "tối thứ 7 có 3 ca cấp cứu" ;

B là biến cố: "tối thứ 7 có 4 ca cấp cứu" ;

C là biến cố: "tối thứ 7 có 5 ca cấp cứu" .

Ta có: $P(A) = P(X = 3) = 0,2$;

$P(B) = P(X = 4) = 0,1$;

$P(C) = P(X = 5) = 0,05$.

Hiển nhiên các biến cố A, B, C đôi một xung khắc

Xét biến cố: $D = A \cup B \cup C$, rõ ràng đây là biến cố "tối thứ 7 có nhiều hơn 2 ca cấp cứu"

Vì thế: $P(D) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,35$.

Vậy xác suất để tối thứ bảy phải tăng cường thêm bác sĩ trực là: 0,35.

b) Đặt M là biến cố: "tối thứ bảy có 1 ca cấp cứu" ;

N là biến cố: "tối thứ bảy có 2 ca cấp cứu" ;

Khi đó, biến cố: "tối thứ bảy có ít nhất một ca cấp cứu" sẽ là:

$G = A \cup B \cup C \cup M \cup N$ (A, B, C, M, N đôi một xung khắc)

Do đó xác suất của biến cố này là:

$p = P(A \cup B \cup C \cup M \cup N) = P(A) + P(B) + P(C) + P(M) + P(N) = 0,85$.

Chú ý: Xét biến cố E: "Tối thứ 7 không có ca cấp cứu nào". Rõ ràng E và G đối nhau nên $P(G) = 1 - P(E) = 1 - 0,15 = 0,85$.

Bài 46: Số điện thoại gọi đến một tổng đài trong khoảng thời gian 1 phút vào buổi trưa (từ 12 giờ đến 13 giờ) là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,3	0,2	0,15	0,15	0,1	0,1

Tính xác suất để trong khoảng thời gian từ 12 giờ 30 phút đến 12 giờ 31 phút có nhiều hơn 2 cuộc gọi.

Hướng dẫn giải

Làm tương tự bài 45a, ta có kết quả: $p = 0,35$.

Bài 47: Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc X trong bài tập 44 (tính chính xác đến hàng phần trăm).

Giải

Ta có bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X là:

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

$E(X) = 0 \,.\, 0,125 + 1 \,.\, 0,375 + 2 \,.\, 0,375 + 3 \,.\, 0,125 = 1,5$

$V(X) = (0 - 1,5)^2.0,125 + (1 - 1,5)^2.0,375 + (2 - 1,5)^2.0,375 + (3 - 1,5)^2.0.125$

$= 0,75$

$\sigma(X) = \sqrt{0,75} \approx 0,87$.

Bài 48: Tính kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc X trong bài tập 45 (tính chính xác đến hàng phần trăm).

Giải

Ta có: $E(X) = 1.0,2 + 2.0,3 + 3.0,2 + 4.0,1 + 5.0,05$

$= 2,05$

$V(X) = 1^2.0,2 + 2^2.0,3 + 3^2.0,2 + 4^2.0,1 + 5^2.0,05 - (2,05)^2$

$\approx 1,85$.

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 1,36$.

Bài 49: Tính kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc X trong bài tập 46 (tính chính xác đến hàng phần trăm).

Giải

Vận dụng các công thức kì vọng, phương sai, độ lệch tiêu chuẩn ta có:

$E(X) = 1,85$; $V(X) \approx 2,83$; $\sigma(X) \approx 1,68$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Số vụ vi phạm luật giao thông trên đoạn đường A vào tối thứ 7 hàng tuần là một biến ngẫu nhiên rời rạc X. Giả sử có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,1	0,3	0,2	0,15	0,15	0,1

a) Xác suất để xảy ra ít nhất 1 vụ vi phạm luật giao thông vào tối thứ 7 là :

(A) 0,7 ; (B) 0,8 ; (C) 0,85 ; (D) 0,9.

b) Kì vọng của biến ngẫu nhiên X là:

(A) 2,25 ; (B) 2,15 ; (C) 2,05 ; (D) 1,95.

c) Độ lệch chuẩn của X (làm tròn đến hàng phần vạn) là:

(A) 1,5123 ; (B) 1,5124 ; (C) 1,5125 ; (D) 1,5126.

2. Có 2 lô sản phẩm với tỉ lệ sản phẩm tương ứng là 0,1 và 0,2. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi lô ra một sản phẩm. Gọi X là biến ngẫu nhiên rời rạc, X là số phế phẩm lấy được trong 2 sản phẩm vừa lấy ra.

a) Khẳng định nào sau đây đúng nhất:

(A) $P(X = 0) = 0,72$; $P(X = 1) = 0,26$; $P(X = 3) = 0,02$;

(B) $P(X = 0) = 0,27$; $P(X = 1) = 0,63$; $P(X = 3) = 0,1$;

(C) $P(X = 0) = 0,72$; $P(X = 1) = 0,11$; $P(X = 3) = 0,17$;

(D) $P(X = 0) = 0,26$; $P(X = 1) = 0,72$; $P(X = 3) = 0,02$.

b) Kì vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc X là:

(A) 0,83 ; (B) 0,3 ; (C) 0,45 ; (D) 0,76.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1a	1b	1c	2a	2b
Đáp án	(D)	(A)	(B)	(A)	(B)

LUYỆN TẬP

I. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 50: Chọn ngẫu nhiên 3 đứa trẻ từ một nhóm trẻ gồm 6 trai và 4 gái. Gọi X là số bé gái trong số 3 đứa trẻ được chọn. Lập bảng phân bố xác suất của X.

Giải

Hiển nhiên X là biến ngẫu nhiên và nhận giá trị trên tập $\{0,1,2,3\}$.

Gọi Ω là không gian mẫu, ta có: $|\Omega| = C_{10}^3 = 120$

Gọi A_k là biến cố: "trong 3 đứa trẻ chọn ra có k bé gái" k = 0, 1, 2, 3. Từ đó dễ dàng ta có được:

$\left|\Omega_{A_0}\right| = C_6^3 = 20$; $\left|\Omega_{A_1}\right| = C_4^1.C_6^2 = 60$;

$\left|\Omega_{A_2}\right| = C_4^2.C_1^6 = 36$; $\left|\Omega_{A_0}\right| = C_4^3 = 4$.

Do vậy $P_0 = P(X = 0) = \dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6}$; $P_1 = P(X = 1) = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

$$P_2 = P(X = 2) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10} = 0,3;\ P_3 = P(X = 3) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

Do đó có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	0,5	0,3	$\frac{1}{30}$

Bài 51: Số đơn đặt hàng đến trong một ngày ở một công ty vận tải là một biến ngẫu nhiên rời rạc X và có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,4	0,1	0,1	0,1

a) Tính xác suất để số đơn đặt hàng thuộc đoạn $[1;4]$.

b) Tính xác suất để có ít hơn 4 đơn đặt hàng đến công ty đó trong 1 ngày.

c) Tính số đơn đặt hàng trung bình đến công ty đó trong 1 ngày.

Giải

a) Do số đơn đặt hàng thuộc đoạn $[1;4]$ nên ta có hoặc là số đơn đặt hàng là 1, hoặc số đơn đặt hàng là 2, hoặc là số đơn đặt hàng là 3, hoặc là số đơn đặt hàng là 4. Vì vậy dễ dàng chỉ ra được xác suất của biến cố này là là $P_1 = 0,2 + 0,4 + 0,1 + 0,1 = 0,8$.

b) Ít nhất 4 đơn đặt hàng đến công ty trong một ngày nên số đơn đặt hàng đến công ty chỉ có thể là 4 hoặc 5. Do đó xác suất của biến cố này là: $P_2 = 0,1 + 0,1 = 0,2$.

c) Số đơn đặt hàng trung bình đến công ty trong ngày chính là kì vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc X. Do đó số đơn đặt hàng trung bình là:
$E(X) = 0,2 + 0,8 + 0,3 + 0,4 + 0,5 = 2,2$.

Bài 52: Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	0,01	0,05	0,1	0,14	0,18	0,25	0,15	0,07	0,04	0,01

a) Tính $P(2 < X < 7)$;

b) Tính $P(X > 5)$.

Giải

a) Ta có: $P(2 < X < 7) = P(X = 3 \text{ hoặc } X = 4 \text{ hoặc } X = 5 \text{ hoặc } X = 6)$

$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$

$= 0,14 + 0,18 + 0,25 + 0,15 = 0,72$.

b) $P(X > 5) = P(X = 6 \text{ hoặc } X = 7 \text{ hoặc } X = 8 \text{ hoặc } X = 9)$

$= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$

$= 0,15 + 0,07 + 0,04 + 0,01 = 0,27$.

Bài 53: Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{3}{14}$

Tính E(X), V(X) và $\sigma(X)$ (Tính chính xác đến hàng phần nghìn).

Giải

Ta có $E(X) = 1.\frac{15}{56} + 2.\frac{27}{56} + 3.\frac{3}{14} = 1,875$.

$V(X) = \frac{15}{56} + 4.\frac{27}{56} + 9.\frac{3}{14} - (1,875)^2 \approx 0,609$.

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 0,780$.

Bài 54: Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	15	18	21	24
P	$\frac{3}{14}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{28}$

Tính E(X), V(X) và $\sigma(X)$ (Tính chính xác đến hàng phần nghìn).

Hướng dẫn giải

Vận dụng các công thức E(X), V(X) và $\sigma(X)$ sau khi làm tròn đến hàng phần nghìn ta có: $E(X) = 18,375$; $V(X) \approx 5,484$ và $\sigma(X) \approx 2,342$.

II. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Một hộp có 3 quả cầu trắng, 2 quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng quả cho đến khi lấy được quả cầu trắng thì dừng lại. Gọi X là số quả cầu lấy ra.

a) Kì vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc X là:

(A) 1,3 ; (B) 1,4 ; (C) 1,5 ; (D) 1,6.

b) Phương sai của X là:

(A) 0,45 ; (B) 0,451 ; (C) 0,452 ; (D) 0,453.

c) Độ lệch chuẩn của X (tính chính xác đến hàng phần vạn) là:

(A) 0,7608 ; (B) 0,6708 ; (C) 0,6780 ; (D) 0,8760

2. Tại điểm đen A về tai nạn giao thông. Số vụ tai nạn nghiêm trọng trong 1 tháng là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4
P	0,05	0,4	0,3	0,15	0,1

a) Xác suất để có ít nhất 2 vụ tai nạn giao thông trong một tháng tại điểm đen A là:

(A) 0,45 ; (B) 0,55 ; (C) 0,65 ; (D) 0,75.

b) Xác suất để có nhiều nhất 3 vụ tai nạn giao thông trong một tháng tại điểm đen A là:

(A) 0,7 ; (B) 0,8 ; (C) 0,9 ; (D) 0,95.

III. ĐÁP ÁN

Câu	1a	1b	1c	2a	2b
Đáp án	(C)	(A)	(B)	(B)	(C)

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 55: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số (không nhất thiết khác nhau) ?

Giải

Gọi số đó là $\overline{abc}$, $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $a \neq 0$.

- có 4 cách chọn c (vì số đó là số chẵn)
- có 7 cách chọn b; có 6 cách chọn c

Theo quy tắc nhân ta có: 4.7.6 = 168 số.

Bài 56: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số khác nhau ?

Giải

Gọi số đó là $\overline{abc}$, $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

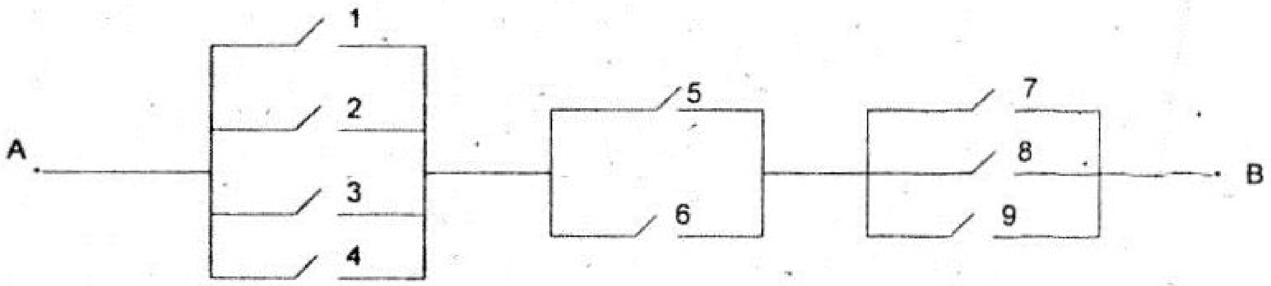
- vì số đó là chẵn nên có 2 cách chọn c.
- có 4 cách chọn số b; 3 cách chọn số a

Theo quy tắc nhân ta có: 2.3.4 = 24 (số).

Bài 57: Xét sơ đồ mạng điện có 9 công tắc, trong đó mỗi công tắc có hai trạng thái đóng – mở.

a) Hỏi mạng điện có thể có bao nhiêu cách đóng – mở 9 công tắc trên?

b) Hỏi mạng điện có thể có bao nhiêu cách đóng – mở 9 công tắc trên để thông mạch từ A đến B (tức là dòng điện đi từ A đến B)?



Giải

Để cho tiện ta đánh số các công tắc từ 1 đến 9 (hình vẽ).

a) Mỗi công tắc k, $1 \le k \le 9$ có hai trạng thái đóng – mở. Do đó có tất cả $2^9 = 512$ cách đóng – mở công tắc trong mạch điện.

b) Mạch điện được thông từ A đến B khi và chỉ khi 4 công tắc 1, 2, 3, 4 không cùng mở, 2 công tắc 5 và 6 không cùng mở, 3 công tắc 7, 8, 9 không cùng mở.

Với 4 công tắc 1, 2, 3, 4 có tất cả là 2^4 cách đóng mở khác nhau. Do đó có $2^4 - 1 = 15$ cách để thông mạch qua 4 công tắc này (loại bỏ đúng 1 trường hợp là 4 công tắc cùng mở).

Tương tự như vậy để dòng điện thông mạch qua các công tắc 5 và 6 có $2^2 - 1$ cách, dòng điện thông mạch qua các công tắc 7, 8, 9 có $2^3 - 1$ cách.

Theo quy tắc nhân ta có: $15.3.7 = 315$ cách.

Vậy có 315 cách đóng – mở 9 công tắc đã cho sao cho dòng điện thông mạch từ A đến B.

Bài 58: Trong không gian cho tập gồm 9 điểm trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tứ diện với đỉnh thuộc tập hợp đã cho.

Giải

Ta đã biết cứ 4 điểm không đồng phẳng xác định một tứ diện nhận 4 điểm đó làm đỉnh. Theo giả thiết 9 điểm đã cho không có 4 điểm nào đồng phẳng nên số các tứ diện chính là số các tập con 4 phần tử của 9 điểm đó. Do vậy số các tứ diện là: $C_9^4 = 126$.

Bài 59: Một câu lạc bộ có 25 thành viên.

a) Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào Ủy ban Thường trực ?

b) Có bao nhiêu cách chọn Chủ tịch, Phó Chủ tịch và Thủ quỹ ?

Giải

a) Từ 25 người chọn ra 4 người bất kì vào ủy ban thường trực có C_{25}^4 (cách) = 12 650 (cách).

b) Giả sử có 3 người A, B, C được chọn và giữ các chức vụ đó. Trong 3 người này ai cũng có thể giữ 1 trong 3 chức vụ chủ tịch, phó chủ tịch và thủ quỹ. Do đó có 3! cách phân công chức vụ. Vì thế trong 25 người chọn ra 3 người giữ các chức vụ chủ tịch, phó chủ tịch và thủ quỹ có:
$C_{25}^3.3! = 13\ 800$ (cách).

Bài 60: Tìm hệ số của x^8y^9 trong khai triển $(3x + 2y)^{17}$.

Giải

Ta có: $(3x+2y)^{17} = \sum\limits_{k=0}^{17} C_{17}^k (3x)^{17-k}.(2y)^{17-k} = \sum\limits_{k=0}^{17} C_{17}^k.3^{17-k}.2^k.x^{17-k}.y^k$

Hệ số của x^8y^9 là $C_{17}^k.3^{17-k}.2^k$ với $\begin{cases} k = 9 \\ 17 - k = 8 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow$ Hệ số của x^8y^9 là: $C_{17}^9.3^8.2^9$.

Bài 61: Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên bé hơn 1000. Tính xác suất để số đó:

a) Chia hết cho 3; b) Chia hết cho 5.

Giải

Không gian mẫu: $\Omega = \{0, 1, 2, ..., 998, 999\}$

Do đó: $|\Omega| = 1000$.

a) Gọi A là biến cố: "Số chọn ra chia hết cho 3". Khi đó:
$\Omega_A = \{3k \setminus k \in \mathbb{N}\} \subset \Omega$
$\Leftrightarrow \Omega_A = \{3k \setminus k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le 333\} \Rightarrow |\Omega_A| = 334$

Vì vậy xác suất P_1 của biến cố A là: $P_1 = \frac{334}{1000} = 0,334$.

b) Gọi B là biến cố : "số chọn ra chia hết cho 5 ". Khi đó
$\Omega_B = \{5k, k \in N, 0 \le k \le 199\} \Rightarrow |\Omega_B| = 200$. Vì vậy, xác suất P_2 của biến cố B là: $P_2 = \frac{200}{1000} = 0,2$.

Bài 62: Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài trong cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài. Tính xác suất để trong 5 quân bài này có quân 2 rô, quân 3 pích, quân 6 cơ, quân 10 nhép và quân K cơ.

Giải

Không gian mẫu là Ω gồm tất cả các tập hợp 5 con bài trong 52 con bài. Do vậy $|\Omega| = C_{52}^5$.

Có đúng 1 cách để chọn đúng quân 2 rô, 1 cách chọn đúng con 3 pích, 1 cách chọn đúng quân 6 cơ, 1 cách chọn đúng quân 10 nhép và 1 cách chọn đúng con K cơ. Do đó có đúng 1 cách chọn được 5 quân bài trên. Vì thế xác suất của biến cố này là: $P = \frac{1}{C_{52}^5}$.

Bài 63: Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài trong cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài. Tính xác suất để trong 5 quân bài đó có ít nhất một quân át (tính chính xác đến hàng phần nghìn).

Giải

Ta có: $|\Omega| = C_{52}^5$.

Gọi B là biến cố: "5 quân bài chọn ra không có quân nào là quân át". Rõ ràng biến cố B là biến cố đối của biến cố A: "5 quân bài chọn ra có ít nhất 1 quân là át".

Do đó: P(A) = 1 − P(B).

Ta sẽ tính P(B): số cách chọn ra 5 quân bài trong 52 quân mà không có quân át chính bằng số cách chọn 5 quân bài trong cỗ bài sau khi đã loại bỏ 4 quân át ra ngoài hay bằng C_{48}^5. Từ đó ta có được

$$P(B) = \frac{C_{48}^5}{C_{52}^5}$$

Ta suy ra: $P(A) = 1 - \frac{C_{48}^5}{C_{52}^5} \approx 0,341$.

Bài 64: Có hai hòm, mỗi hòm chứa 5 thẻ được đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hòm một thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên 2 thẻ rút ra không nhỏ hơn 3.

Giải

Không gian mẫu: $\Omega = \{(i;j) \backslash i, j \in \{1,2,3,4,5\}\}$, ở đó, chẳng hạn bộ (2; 5) là rút được ở hòm thứ nhất thẻ ghi số 2, thẻ rút được ở hòm thứ hai ghi số 5.

Dễ thấy: $|\Omega| = 25$.

Gọi A là biến cố: "tổng hai số ghi trong hai thẻ rút ra không nhỏ hơn 3".

Do đó: $\Omega_A = \{(i;j) \backslash i, j \in \{1,2,3,4,5\}; i + j \geq 3\}$ hay viết một cách tường minh hơn ta được:

$$\Omega_A = \{(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(3;1),(3;2);$$
$$(3;3),(3;4),(3;5),(4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(5;1),(5;2),(5;3);$$
$$(5;4),(5;5)\}$$. Nên $|\Omega| = 24$.

Vì vậy: $P(A) = \frac{24}{25} = 0,96$.

- Chú ý: ta có thể thực hiện theo cách khác:

Gọi B là biến cố: "tổng hai số ghi trên 2 thẻ rút ra nhỏ hơn 3". Rõ ràng B là biến cố đối của biến cố A. Mặt khác:

$\Omega_B = \{(1;1)\}$ nên $|\Omega_B| = 1 \Rightarrow P(B) = \dfrac{1}{25}$

$\Leftrightarrow 1 - P(A) = \dfrac{1}{25} \Leftrightarrow P(A) = \dfrac{24}{25} = 0,96$.

Bài 65: Có 3 hòm, mỗi hòm chứa 5 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hòm một tấm thẻ. Tính xác suất để:

a) Tổng các số ghi trong tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 4;

b) Tổng các số ghi trong 3 tấm thẻ rút ra bằng 6.

Giải

Không gian mẫu: $\Omega = \{(i;j;k) \setminus i,j,k \in \{1,2,3,4,5\}\}$

$\Rightarrow |\Omega| = 5^3 = 125$.

a) Gọi A là biến cố: "tổng các số ghi trong 3 tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 4"

B là biến cố: "tổng các số ghi trong 3 tấm thẻ rút ra nhỏ hơn 4"

Ta thấy: $B = \overline{A} \Rightarrow P(B) = 1 - P(A)$.

Mặt khác: $\Omega_B = \{(1;1;1)\}$ nên $|\Omega_B| = 1 \Rightarrow P(B) = \dfrac{1}{125}$

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{124}{125} = 0,992$.

b) Gọi C là biến cố: "tổng các số ghi trong 3 tấm thẻ rút ra bằng 6".

Khi đó:

$\Omega_A = \{(2;2;2),(1;1;4),(1;4;1),(4;1;1),(1;2;3),(1;3;2),(2;1;3),(2;3;1);$
$(3;1;2),(3;2;1)\}$.

(vì chỉ có 3 bộ số nguyên dương 2, 2, 2 và 1, 1, 4 và 1, 2, 3 có tổng bằng 6).

Do vậy $|\Omega_C| = 10 \Rightarrow P(C) = \dfrac{10}{125} = 0,08$.

Bài 66: Số lỗi đánh máy trên một trang sách là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,01	0,09	0,3	0,3	0,2	0,1

Tính xác suất để:

a) Trên trang sách có nhiều nhất 4 lỗi;

b) Trên trang sách có ít nhất 2 lỗi.

Giải

a) Gọi A là biến cố: "Trên trang sách có nhiều nhất 4 lỗi".

Ta suy ra: $\overline{A}$ là biến cố: "trên trang sách có 5 lỗi"

Mặt khác $P\left(\overline{A}\right) = 0,1 \Rightarrow P(A) = 0,9$.

b) Gọi B là biến cố: "Trên trang sách có ít nhất 2 lỗi".

Ta suy ra : $\overline{B}$ là biến cố: "trên trang sách có nhiều nhất một lỗi".

Vì $P\left(\overline{B}\right) = P(X = 0 \text{ hoặc } X = 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,1$

Nên $P(B) = 1 - 0,1 = 0,9$.

Bài 67: Có hai túi: túi thứ nhất chứa 3 tấm thẻ đánh số 1, 2, 3. Túi thứ 2 chứa 4 tấm thẻ đánh số 4, 5, 6, 8. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi một tấm thẻ rồi cộng hai số ghi trên hai tấm thẻ với nhau. Gọi X là số thu được:

a) Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Tính E(X).

Giải

Ta có X là biến ngẫu nhiên, dễ thấy X lấy các giá trị thuộc tập $\{5,6,7,8,9,10,11\}$.

Ta có không gian mẫu:

$$\Omega = \{(1,4);(1,5);(1,6);(1,8);(2,4);(2,5);(2,6);(2,8);(3,4);(3,5);(3,6);(3,8)\}$$

$\Rightarrow |\Omega| = 12$.

- Tổng 2 số ghi trên 2 thẻ bằng 5 chỉ có 1 trường hợp đó là cặp (1; 4). Do vậy $P(X = 5) = \frac{1}{12}$.
- Tổng 2 số ghi trên 2 thẻ bằng 6 chỉ có 2 trường hợp đó là cặp (1; 5), (2;4). Do vậy $P(X = 6) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
- Tổng 2 số ghi trên 2 thẻ bằng 7 chỉ có 3 trường hợp đó là cặp (1; 6) (2;5) (3;4). Do vậy $P(X = 7) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$.
- Tổng 2 số ghi trên 2 thẻ bằng 8 chỉ có 2 trường hợp đó là cặp (2; 6); (3;5). Do vậy $P(X = 8) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
- Tổng 2 số ghi trên 2 thẻ bằng 9 chỉ có 2 trường hợp đó là cặp (1; 8), (3;6). Do vậy $P(X = 9) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
- Tổng 2 số ghi trên 2 thẻ bằng 10 chỉ có 1 trường hợp đó là cặp (2; 8). Do vậy $P(X = 10) = \frac{1}{12}$.
- Tổng 2 số ghi trên 2 thẻ bằng 11 chỉ có 1 trường hợp đó là cặp (3; 8). Do vậy $P(X = 11) = \frac{1}{12}$.

Ta có bảng phân bố xác xuất của biến ngẫu nhiên rời rạc X là:

X	5	6	7	8	9	10	11
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0,25	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

- Áp dụng công thức tính kì vọng ta có:

$$E(X)=\frac{5}{12}+1+\frac{7}{4}+\frac{8}{6}+\frac{9}{6}+\frac{10}{12}+\frac{11}{12}=7,75$$

Bài 68. Một nhóm có 7 người trong đó có 4 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 người. Gọi X là số nữ trong 3 người được chọn.

a) Lập bảng phân bố xác xuất của X.

b) Tính E(X), V(X) (Tính chính xác đến hàng phần trăm)

Giải

Rõ ràng X là biến ngẫu nhiên và X nhận các giá trị thuộc tập {0, 1, 2, 3}.

- Ta có không gian mẫu Ω có: $C_7^3=35$ phần tử.

– Trường hợp 1: Trong 3 người được chọn không có nữ. Khi đó $C_4^3=4$ cách.

Do vậy $P(X=0)=\frac{4}{35}$.

– Trường hợp 2: Trong 3 người được chọn có đúng 1 nữ. Khi đó $C_3^1.C_4^2=18$.

Do vậy $P(X=1)=\frac{18}{35}$.

– Trường hợp 3: Trong 3 người được chọn có đúng 2 nữ. Khi đó có $C_3^2.C_4^1=3.4=12(\text{cách})$. Do vậy $P(X=2)=\frac{12}{35}$.

– Trường hợp 4: Trong 3 người được chọn đều là nữ. Khi đó có đúng 1 cách chọn, từ đây suy ra : $P(X=3)=\frac{1}{35}$.

Ta có bảng phân bố xác xuất của X như sau:

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

b) Áp dụng công thức kì vọng và phương sai ta có được:

$$E(X)=\frac{9}{7};\ V(X)\approx 0,49$$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Trong các bài từ 69 đến 73, hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả đã cho.

Bài 69. Trong các số nguyên từ 100 đến 999, số các số mà các chữ số của nó tăng dần hoặc giảm dần (kể từ trái sang phải) bằng:

(A) 120 ; (B) 168 ; (C) 204 ; (D) 216

Giải

Số cần tìm có dạng: abc

* Trường hợp 1: Loại tăng dần:

Các KNa	Số b	Các KNc	Số các số $\overline{abc}$
1	2	7	7
2	3	6	12
3	4	5	15
4	5	4	16
5	6	3	15
6	7	2	12
7	8	1	7
			Tổng = 84

* Trường hợp 2: Loại giảm dần:

Các KNa	Số b	Các KNc	Số các số $\overline{abc}$
8	1	1	8
7	2	2	14
6	3	3	18
5	4	4	20
4	5	5	20
3	6	6	18
2	7	7	14
1	8	8	8
			Tổng = 120

Vậy, số các số cần tìm: 120 + 84 = 204

Bài 70. Một đội xây dựng gồm 10 công nhân, 3 kĩ sư. Để lập một tổ công tác cần chọn một kĩ sư làm tổ trưởng, một công nhân làm tổ phó và 5 công nhân làm tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

(A) 3780 ; (B) 3680 ; (C) 3760 ; (D) 3520.

Giải

- Do có 3 kĩ sư nên có $C_3^1 = 3$ cách chọn một kĩ sư làm tổ trưởng.
- Có 10 công nhân nên có $C_{10}^1 = 10$ cách chọn 1 công nhân làm tổ phó.
- Sau khi đã đưa một công nhân làm tổ phó thì chỉ còn 9 công nhân, bây giờ chọn 5 người để làm tổ viên, lúc này có $C_9^5 = 126$ cách chọn

Theo quy tắc nhân có tất cả: 3.10.126 = 3780 (cách).

Vậy, khẳng định (A) là đáp án chính xác.

Bài 71. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau (chữ số đầu tiên phải khác 0)?

(A) 1250 ; (B) 1260 ; (C) 1280 ; (D) 1270

Giải

– Trước hết ta tìm tất cả các số có dạng $\overline{0abcd}$ ở đó d là số chẵn, a, b, c, d và số 0 đôi một khác nhau.

Có 3 cách chọn d, 5 cách chọn c, 4 cách chọn b, 3 cách chọn a. Theo quy tắc nhân có: 3.5.4.3 = 150 (số)

– Bây giờ ta tìm tất cả các số có dạng: $\overline{abcde}$ với e chẵn. Có 4 cách chọn e, 6 cách chọn d, 5 cách chọn c, 4 cách chọn b, 3 cách chọn a. Theo quy tắc nhân có: 4.6.5.4.3 = 1440 (số)

– Số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$1440 - 180 = 1260 \text{ (số)}$$

Vậy, khẳng định (B) là khẳng định đúng.

Bài 72. Tìm hệ số của x^9 sau khi khai triển và rút gọn đa thức:

$$(1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12} + (1+x)^{13} + (1+x)^{14}$$

(A) 3001 ; (B) 3003 ; (C) 3010 ; **(D)** 2901

Giải

– **Xét** $f_1(x) = (1 + x)^9 = (x + 1)^9 = C_9^0x^9 + C_9^1x^8 + \ldots + C_9^9$

⇒ **Hệ số của** x^9 trong $f_1(x)$ là : $C_9^0 = 1$.

– **Xét** $f_2(x) = (1 + x)^{10} = (x + 1)^{10} = C_{10}^0x^{10} + C_{10}^1x^9 + C_{10}^2x^8 \ldots + C_{10}^{10}$

⇒ **Hệ số của** x^9 trong $f_2(x)$ là : $C_{10}^1 = 10$.

– **Xét** $f_3(x) = (1 + x)^{11} = (x + 1)^{11} = C_{11}^0x^{11} + C_{11}^1x^{10} + C_{11}^2x^9 \ldots + C_{11}^{11}$

⇒ **Hệ số của** x^9 trong $f_3(x)$ là : $C_{11}^2 = 55$.

– **Xét** $f_4(x) = (1 + x)^{12} = (x + 1)^{12} = C_{12}^0x^{12} + C_{12}^1x^{11} + C_{12}^2x^{10} \ldots + C_{12}^{12}$

⇒ **Hệ số của** x^9 trong $f_4(x)$ là : $C_{12}^3 = 220$.

– **Xét** $f_5(x) = (1 + x)^{13} = (x + 1)^{13} = C_{13}^0x^{13} + C_{13}^1x^{12} + C_{13}^2x^{11} + C_{13}^3x^{10} \ldots +$

⇒ **Hệ số của** x^9 trong $f_5(x)$ là : $C_{13}^4 = 715$.

– **Xét** $f_6(x) = (1 + x)^{16} = (x + 1)^{16} = C_{14}^0x^{14} + C_{14}^1x^{13} + C_{14}^2x^{12} + C_{14}^3x^{11} + C_{14}^4x^{10} \ldots +$

⇒ **Hệ số của** x^9 trong $f_2(x)$ là : $C_{14}^5 = 2002$.

Do đó hệ số của x^9 trong khai triển là:

$$2002 + 715 + 220 + 55 + 10 + 1 = 3003$$

Vậy khẳng định (B) là khẳng định đúng.

Bài 73. Hai xạ thủ độc lập với nhau bắn vào một tấm **bia. Mỗi người bắn một viên. Xác** suất bắn trúng của xạ thủ **thứ nhất là 0,7; của xạ thủ thứ 2 là 0,8.** Gọi X là số viên đạn bắn trúng bia. Tính **kì vọng của X.**

(A) 1,75 ; (B) 1,5 ; (C) 1,54 ; **(D)** 1,6

Giải

Gọi **A là biến** cố: "Xạ thủ thứ nhất **bắn trúng bia**";

B là biến cố: "Xạ thủ thứ hai bắn trúng bia".

Khi đó X là biến ngẫu nhiên và nhận giá trị trong tập {0, 1, 2}. (Vì có thể không viên đạn nào trúng bia, có thể 1 viên trúng một viên trật, có thể có hai viên cùng trúng bia).

Đặt

$$P_0 = P(X=0) = P(\overline{A}.\overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}) = 0,2.0,3 = 0,06$$

$$P_1 = P(X=1) = P(\overline{A}B \cup A\overline{B}) = P(\overline{A})P(B) + P(A)P(\overline{B})$$

$$= 0,3.0,8 + 0,7.0,2 = 0,38$$

$$P_3 = P(X=2) = P(AB) = P(A).P(B) = 0,7.0,8 = 0,56$$

(Chú ý là các biến cố: A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$ đôi một độc lập).

Do đó E(X) = 0,06.0 + 0,38.1 + 0,56.2 = 1,5

Vậy khẳng định (B) là khẳng định đúng.

CHƯƠNG III. DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

* Chứng minh cho mệnh đề chứa biến A(n) đúng với mọi n là số nguyên dương.

– Bước 1: Chứng minh cho A(n) là một mệnh đề đúng với n = 1

– Bước 2: (bước quy nạp). Giả thiết rằng A(n) đúng với n = k ≥ 1, $k \in \mathbb{Z}$. Từ đó chứng minh cho A(n) cũng đúng với n = k + 1, k ≥ 1, $k \in \mathbb{Z}$.

* Giả thiết A(n) đúng với n = k ≥ 1, $k \in \mathbb{Z}$ là giả thiết quy nạp.

Chú ý: Nếu chứng minh A(n) đúng với mọi số nguyên $n \geq p$ thì ở:

– Bước 1 ta chứng minh cho A(n) đúng với n = p.

– Bước 2: giả thiết A(n) đúng với $n = k \geq p$, $k \in \mathbb{Z}$, chứng minh A(n) đúng với n = k + 1 $\geq$ p + 1, $k \in Z$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có đẳng thức sau:

$$1+2+3+4+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

Giải

Khi n=1 ta có vế trái bằng 1, vế phải bằng $\frac{1(1+1)}{2}=1$ suy ra (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đung với $n = k \ge 1$, $k \in \mathbb{N}^*$ tức là:

$$1+2+3+4+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

$$\Rightarrow 1+2+3+4+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)\times(k+2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+2+3+4+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)\times(k+2)}{2}$$

$\Leftrightarrow$ (1) đúng với $n=k+1\ge 2, k\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow 1+2+3+4+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n$ nguyên dương.

Bài 2: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có đẳng thức:

$$2^2+4^2+...+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} \quad (2)$$

Giải

Với n = 1, ta có vế trái bằng 4, vế phải bằng $\frac{2.1(1+1)(2.1+1)}{3}=4$

$\Rightarrow$ (2) đúng với n = 1.

Giả sử (2) đúng với n = $k \ge 1$, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là:

$$2^2+4^2+...+(2k)^2=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}$$

$$\Rightarrow 2^2+4^2+...+(2k)^2+[2(k+1)]^2=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}+[2(k+1)]^2$$

$$=2(k+1)\left[\frac{2k^2+7k+6}{3}\right]$$

$$=\frac{2(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{3}=\frac{2(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2^2+4^2+...+(2k)^2+[2(k+1)]^2=\frac{2(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{3}$$

$\Leftrightarrow$ (2) đúng với $n = k+1 \geq 2, k \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow 2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}, \ \forall n \text{ nguyên dương.}$$

Bài 3: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có bất đẳng thức: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2.\sqrt{n}$ (3)

Giải

Khi n = 1, vế trái bằng 1, vế phải bằng $2.\sqrt{1} = 2 > 1$

$\Rightarrow$ (3) đúng khi n = 1.

Giả sử (3) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}^*$ tức là:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad \text{(a)}$$

Ta sẽ chứng minh $2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$ (b)

$\Leftrightarrow 2\sqrt{k^2+k} < 2k+1 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k < 4k^2 + 4k + 1 \Leftrightarrow 0 < 1, \ \forall k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$;

từ đây ta suy ra (b) đúng. Do vậy từ (a) và (b) ta có được

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$, tức là (3) đúng với n = k + 1.

Vậy nên bất đẳng thức: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n}$ đúng $\forall n$ nguyên dương.

Bài 4: Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$ ta luôn có bất đẳng thức:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \quad (4).$$

Giải

Khi n = 2 $\Rightarrow$ vế trái bằng $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

vế phải bằng $\frac{1+2}{2.2} = \frac{3}{4}$.

$\Rightarrow$ (4) đúng khi n = 2.

Giả sử (4) đúng khi $n = k \geq 2, \ k \in \mathbb{N}^*$ tức là:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k}$$

$$\Rightarrow\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)}\right)=\frac{k+1}{2k}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)},\ \forall k\geq 2, k\in\mathbb{N}^*$$ hay

(4) đúng với n = k + 1

Vậy $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n},\ \forall n\geq 2, n\in\mathbb{N}^*$.

Bài 5: Cho n là số nguyên dương lớn hơn 1. Hãy chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}\quad (5)$$

Giải

Khi n = 2 ⇒ vế trái bằng $\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}=\frac{7}{12}>\frac{13}{24}$.

⇒ (5) đúng khi n = 2.

Giả sử (5) đúng khi $n=k\geq 2, k\in\mathbb{N}^*$, tức là ta có:

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{k+k}>\frac{13}{24}$$

Ta chứng minh (5) đúng với n = k + 1 .

Đặt: $P=\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+...+\frac{1}{(k+1)+k}+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}$

Ta có: $P=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{k+k}\right)+\frac{1}{(k+1)+k}+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}-\frac{1}{k+1}$

$$>\frac{13}{24}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$$

$$>\frac{13}{24}+\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}>\frac{13}{24}$$. Từ đây ta suy ra:

(5) đúng với $n=k+1\geq 3, k\in\mathbb{N}^*$.

Vậy $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24},\ k\in\mathbb{N}^*$.

Bài 6: Với mỗi số nguyên dương n, đặt $u_n = 7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có u_n chia hết cho 5,.

Giải

Với n = 1, ta có $u_1 = 7.2^{2-2} + 3^{2-1} = 10$ chia hết cho 5.

Giả sử $u_k = 7.2^{2k-2} + 3^{2k-1}$ chia hết cho 5, $\forall k \geq 1, k \in \mathbb{N}^*$

Ta có: $u_{k+1} = 7.2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1}$

$= 7.2^{2k} + 3^{2k+1} = 7.2^2.2^{2k-2} + 3^2.3^{2k-1}$

$= 4\left(7.2^{2k-2} + 3^{2k-1}\right) + 5.3^{2k-1}$

$\Rightarrow u_{k+1} = 4.u_k + 5.3^{2k-1}$ chia hết cho 5 (vì $u_k \vdots 5$).

Vậy $u_n = 7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5 với mọi n nguyên dương.

Bài 7: Cho số thực x > –1. Chứng minh rằng:

$(1+x)^n \geq 1 + n.x$ (7), với mọi số nguyên dương n.

Giải

Khi n = 1, vế trái bằng x + 1, vế phải bằng x + 1, nên (7) đúng khi n = 1.

Giả sử rằng (7) đúng với $n = k \geq 1, k \in N^*$ tức là: $(1+x)^k \geq 1 + k.x$

Ta cần chứng minh (7) đúng với $n = k + 1 \geq 2, k \in N^*$: tức là phải chứng minh:

$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (1+k).x$

Thật vậy $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx).(1+x)$

$$\Leftrightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + k.x^2 \geq 1 + (1+k)x$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$$

Vậy $(1+x)^n \geq 1 + n.x$, $n \in \mathbb{N}^*$, x > –1.

Bài 8: Một học sinh chứng minh mệnh đề: "Với k là số nguyên dương tùy ý, nếu $8^k + 1$ chia hết cho 7 thì $8^{k+1} + 1$ cũng chia hết cho 7" như sau:

Ta có: $8^{k+1} + 1 = 8(8^k + 1) - 7$. Từ đây và giả thiết "$8^k + 1$ chia hết cho 7" hiển nhiên suy ra $8^{k+1} + 1$ chia hết cho 7.

Hỏi từ chứng minh trên, bạn học sinh có thể kết luận được "$8^n + 1$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$" hay không? vì sao?

Giải

Bạn học sinh không thể kết luận "$8^n + 1$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$" được vì:

n = 1 $\Rightarrow$ $8^1 + 1$ không chia hết cho 7.

$\Rightarrow$ "$8^n + 1$ không chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$"

§2. DÃY SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Định nghĩa: Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là dãy số vô hạn (hay gọi tắt là dãy số).

– Kí hiệu : (u_n) với $u_n = u(n)$.

– u_k là số hạng thứ k, u_n là số hạng tổng quát.

– Với $m \in \mathbb{N}^*$ thì $u_1, u_2, u, \ldots, u_m$ gọi là dãy số hữu hạn với số hạng đầu là u_1, số hạng cuối là u_m.

2. Các cách cho một dãy số:

– Cho dãy số bởi công thức số hạng tổng quát.

– Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi.

– Cho bởi diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm:

– Dãy số (u_n) gọi là dãy số tăng nếu mọi n ta có $u_{n+1} > u_n$.

– Dãy số (u_n) gọi là dãy số giảm nếu mọi n ta có $u_{n+1} < u_n$.

4. Dãy số bị chặn:

Định nghĩa: Dãy số (u_n) được gọi là:

- Bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 9: Tìm 5 số hạng đầu của mỗi dãy số sau:

a) Giả sử (u_n) với $u_n = \dfrac{2n^2 - 3}{n}$;

b) Giả sử (u_n) với $u_n = \sin^2 \dfrac{n\pi}{4} + \cos \dfrac{2n\pi}{3}$;

c) Giả sử (u_n) với $u_n = (-1)^n . \sqrt{4^n}$.

Giải

a) $u_1 = -1$; $u_2 = \dfrac{5}{2}$; $u_3 = 5$; $u_4 = \dfrac{29}{4}$; $u_5 = \dfrac{47}{5}$.

b) $u_1 = \sin^2 \dfrac{\pi}{4} + \cos \dfrac{2\pi}{3} = 0$; $u_2 = \sin^2 \dfrac{\pi}{2} + \cos \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$; $u_3 = \dfrac{3}{2}$; $u_4 = -\dfrac{1}{2}$;

$u_5 = 0$.

c) $u_1 = -2$; $u_2 = 4$; $u_2 = -8$; $u_2 = 16$; $u_2 = -32$.

Bài 10: Tìm số hạng thứ 3 và số hạng thứ 5 của mỗi dãy số sau:

a) Dãy số (u_n) xác định bởi :

$u_1 = 0$ và $u_n = \dfrac{2}{u_{n-1}^2 + 1}, \forall n \geq 2$.

b) (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1$, $u_2 = -2$ và $u_n = u_{n-1} - 2U_{n-2}$, $n \geq 3$.

Giải

a) Ta có: $u_2 = \dfrac{2}{u_1^2 + 1} = 2 \Rightarrow u_3 = \dfrac{1}{u_2^2 + 1} = \dfrac{1}{5}$;

$$u_4 = \frac{1}{u_3^2 + 1} = \frac{25}{26} \; ; \; u_5 = \frac{1}{u_4^2 + 1} = \frac{676}{1301}.$$

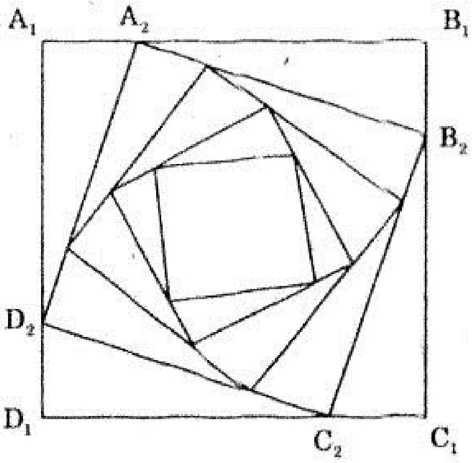
b) $u_3 = u_2 - 2u_1 = -2 - 2 = -4$;

$u_4 = u_3 - 2u_2 = -4 + 4 = 0$;

$\Rightarrow u_5 = u_4 - 2u_3 = 0 + 8 = 8$.

Vậy $u_3 = -4$; $u_5 = 8$.

Bài 11: Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 6 cm. Người ta dựng các hình vuông $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, ..., $A_nB_nC_nD_n$, ... theo cách sau: Với mỗi n = 2, 3, 4... lấy các điểm A_n, B_n, C_n và D_n tương ứng trên các cạnh $A_{n-1}B_{n-1}$, $B_{n-1}C_{n-1}$, $C_{n-1}D_{n-1}$ và $D_{n-1}A_{n-1}$ sao cho$A_{n-1}A_n = 1$ cm và $A_nB_nC_nD_n$ là một hình vuông (h. 3.2(SGK)). Xét dãy số (u_n) với u_n là độ dài cạnh của hình vuông $A_nB_nC_nD_n$. Hãy cho dãy số (u_n) nói trên bởi hệ thức truy hồi.



Hướng dẫn giải

Ta có $u_1 = 6$, $u_2 = \sqrt{(u_1 - 1)^2 + 1} = \sqrt{26}$,..........

$$u_n = \sqrt{(u_{n-1} - 1)^2 + 1}\,,\; u_{n+1} = \sqrt{(u_n - 1)^2 + 1}\,, \;..........$$

Vậy $u_{n+1} = \sqrt{(u_n - 1)^2 + 1}$, $n \geq 1$ (*)

Chứng minh (*) bằng phương pháp quy nạp.

Bài 12: Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$u_1 = 1$ và $u_n = 2u_{n-1} + 3$, với mọi $n \geq 2$.

Bằng phương pháp quy nạp chứng minh rằng $u_n = 2^{n+1} - 3$, $\forall n \geq 1$.

Giải

Khi $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2^{1+1} - 3 = 1$

Giả sử $u_k = 2^{k+1} - 3$, $\forall k \geq 1, k \in \mathbb{N}^*$.

$\Rightarrow u_{k+1} = 2.u_k + 3 = 2.(2^{k+1} - 3) + 3 = 2^{k+2} - 3$

$\Rightarrow u_{k+1} = 2^{k+2} - 3,\ k \geq 1, k \in \mathbb{N}^*$

Vậy $u_n = 2^{n+1} - 3,\ n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 13: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

a) Dãy số (u_n) cho bởi $u_n = n^3 - 3n^2 + 5n - 7$;

b) Dãy số (x_n) cho bởi: $x_n = \dfrac{n+1}{3^n}$;

c) Dãy số (a_n) cho bởi: $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Giải

a) Ta có với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì: $u_n = n^3 - 3n^2 + 5n - 7$

$$u_{n+1} = (n+1)^3 - 3(n+2)^2 + 5(n+1) - 7.$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 - n^3 - 3\left[(n+1)^2 - n^2\right] + 5(n+1) - 5n$$

$$U_{n+1} - U_n = 3n^2 + 3n + 1 - 3(2n+1) + 5$$

$$u_{n+1} - u_n = 3n^2 - 3n + 3 = 3\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] > 0$$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n$

$\Leftrightarrow$ dãy số (u_n) là dãy số tăng.

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n = \dfrac{n+1}{3^n} > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{n+2}{3^{n+1}}$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{3(n+1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3(n+1)} < 1$$

$x_{n+1} < x_n$

Vậy (x_n) là dãy số giảm.

c) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$$\left(\text{do} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right).$$

Vậy (a_n) là dãy số giảm.

Bài 14: Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+3}{3n+2}$ là một dãy số giảm và bị chặn.

Giải

- Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $u_n = \dfrac{2n+3}{3n+2},\ u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)+3}{3(n+1)+2} = \dfrac{2n+5}{3n+5}$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{2n+5}{3n+5} - \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{(2n+5)(3n+2) - (3n+5)(2n+3)}{(3n+5)(3n+2)}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -\frac{5}{(3n+5)(3n+2)} < 0$$

$\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ nên dãy số (u_n) là dãy số giảm.

- Do (u_n) là dãy số giảm nên :

$u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ..., \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow$ dãy số (u_n) bị chặn trên bởi $u_1 = 1$.

Mặt khác do $u_n = \dfrac{2n+3}{3n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

(u_n) vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới nên (u_n) là bị chặn.

LUYỆN TẬP

Bài 15: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = u_n + 5$, với mọi $n \geq 1$.

a) Hãy tính với mọi $n \geq 1$ u_2, u_4 và u_6.

b) Chứng minh rằng $u_n = 5n - 2$ với mọi $n \geq 1$.

Giải

a) Ta có: $u_2 = u_1 + 5 = 8$; $u_3 = u_2 + 5 = 13$;

$\Rightarrow u_4 = u_3 + 5 = 18$; $u_5 = u_4 + 5 = 23$;

$\Rightarrow u_6 = u_5 + 5 = 28$.

Vậy $u_2 = 8$; $u_4 = 18$ và $u_6 = 28$.

b) Chứng minh $u_n = 5n - 2,\ n \geq 1$ (*)

Khi n =1 $\Rightarrow u_1 = 5 - 2 = 3$ nên (*) đúng với n = 1

Giả sử (*) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}^*$ tức là: $U_k = 5k - 2$

$\Rightarrow u_{k+1} = u_k + 5 = 5k - 2 + 5 = 5(k+1) - 2$

$\Rightarrow u_{k+1} = 5(k+1) - 2$, tức là (*) đúng với n = k + 1.

Hay $u_n = 5n - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 16: Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n$, với mọi $n \geq 1$

a) Chứng minh rằng (u_n) là dãy số tăng.

b) Chứng ming rằng $u_n = 1 + (n-1).2^n$, với mọi $n \geq 1$

Giải

a) Mọi số $n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = (n+1).2^n > 0$ điều này chứng tỏ dãy (u_n) là dãy tăng.

b) Chứng minh $u_n = 1 + (n-1).2^n, \forall n \geq 1$ (*)

Khi $n = 1 \Rightarrow u_1 = 1$

$\Rightarrow$ (*) đúng khi $n = 1$

Giả sử (*) đúng khi $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}^*$ tức là:

$u_k = 1 + (k - 1).2^k$

Ta có: $u_{k+1} = u_k + (k + 1).2^k = 1 + (k - 1).2^k + (k + 1).2^k$

$\Rightarrow u_{k+1} = 1 + \left[(k + 1) - 1\right].2^k$, tức là (*) đúng với $n = k + 1$. Hay

$u_n = 1 + (n - 1).2^n, n \geq 1$.

Bài 17: Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n^2 + 1}$, với mọi $n \geq 1$

Chứng minh rằng (u_n) là một dãy số không đổi (dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau).

Giải

Để chứng minh dãy số (u_n) không đổi ta cần chứng minh cho:

$u_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Khi $n = 1 \Rightarrow u_n = 1$,

Giả sử khi $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}^*$ và $u_k = 1$.

Ta cần chứng minh cho với $n = k + 1 \geq 2, k \in \mathbb{Z}$ thì $u_{k+1} = 1$

Thật vậy $u_{k+1} = \dfrac{2}{u_k^2 + 1} = \dfrac{2}{1 + 1} = 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có:

$u_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 18: Cho dãy số (S_n) với $S_n = \sin(4n - 1)\dfrac{\pi}{6}$

a) Chứng minh rằng $S_n = S_{n+3}$ với mọi $n \geq 1$.

b) Hãy tính tổng 15 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

Giải

a) Mọi số $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $S_n = \sin\left[(4n - 1)\dfrac{\pi}{6}\right]$

$\Rightarrow S_{n+3} = \sin\left[(4(n + 3) - 1)\dfrac{\pi}{6}\right] = \sin\left[(4n - 1)\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\right]$

$= \sin\left[(4n - 1)\dfrac{\pi}{6}\right]$. Do đó $S_{n+3} = \sin\left[(4n - 1)\dfrac{\pi}{6}\right] = S_n$

Vậy $S_n = S_{n+3}$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Theo a) ta có: $S_{15} = S_{12} = S_9 = S_6 = S_3$

$S_{14} = S_{11} = S_8 = S_5 = S_2$

$S_{13} = S_{10} = S_7 = S_4 = S_1$

Tổng 15 số hạng đầu tiên của dãy số (S_n) là:

$$T = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{13} + S_{14} + S_{15}$$

$$\Rightarrow T = 5(S_1 + S_2 + S_3)$$

$$T = 5\left[\sin(4-1)\frac{\pi}{6} + \sin(8-1)\frac{\pi}{6} + \sin(12-1)\frac{\pi}{6}\right]$$

$$T = 5\left[\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{11\pi}{6}\right] \Rightarrow T = 5\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow T = 0.$$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$u_1 = 2$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$, với mọi $n \geq 1$. Thế thì số hạng u_4 sẽ là:

(A) $\dfrac{7}{8}$; (B) 1 ; (C) $\dfrac{9}{8}$; (D) $\dfrac{4}{3}$.

Câu 2: Dãy số (u_n) xác định bởi số hạng tổng quát u_n nào sau đây là dãy số tăng?

(A) $u_n = \dfrac{3}{5}$; (B) $u_n = 3n^2 - 5$; (C) $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{2n^2}$; (D) $u_n = (-1)^m.n$.

Câu 3: Dãy số (a_n) cho bởi $a_n = (-1)^n + \cos n$, khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Giảm và bị chặn trên ; (B) Tăng và bị chặn dưới ;
(C) Chỉ bị chặn trên ; (D) Bị chặn .

Câu 4: Dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 2u_n$, với mọi $n \geq 1$. Thế thì số hạng tổng quát u_n bằng :

(A) 2^{n-1} ; (B) 2^n ; (C) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$; (D) $2m - 3$.

Câu 5: Cho dãy số (u_n). Biết $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + 3$, $n \geq 1$. Số hạng thứ 3 là giá trị nào dưới đây?

(A) 12 ; (B) 22 ; (C) 21 ; (D) 32.

IV. ĐÁP ÁN:

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(B)	(D)	(A)	(B)

§3. CẤP SỐ CỘNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa:

– Dãy số (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + d$. Ở đó d là hằng số thực và được gọi là công sai của cấp số cộng (u_n).

2. Tính chất

– Cho cấp số cộng (u_n). Thế thì với $\forall k \geq 2$ ta có $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$.

– Chú ý: nếu cấp số cộng là hữu hạn thì số hạng đầu và cuối không có tính chất trên.

3. Số hạng tổng quát.

– Cho cấp số cộng (u_n), công sai d. Khi đó số hạng tổng quát thu được xác định: $u_n = u_1 + (n-1)d$, $n \geq 1$.

4. Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

– Cho cấp số cộng (u_n), công sai d và $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$. Khi đó S_n được xác định bởi công thức:

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2},\ n \geq 1,\ \text{hay}\ S_n = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right],\ n \geq 1.$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 19. Chứng minh rằng mỗi dãy số sau là một cấp số cộng và hãy xác định công sai của cấp số cộng đó:

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$;

b) Dãy số (u_n) với $u_n = a.n + b$, trong đó a, b là các hằng số.

Giải.

a) Ta có: $u_n = 19n - 5$, $u_{n-1} = 19(n-1) - 5 = 19n - 24$.

$\forall n \geq 2$, $u_n - u_{n-1} = (19n - 5) - (19n - 24)$.

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + 19$

$\Leftrightarrow$ (u_n) là cấp số cộng và công sai d = 19.

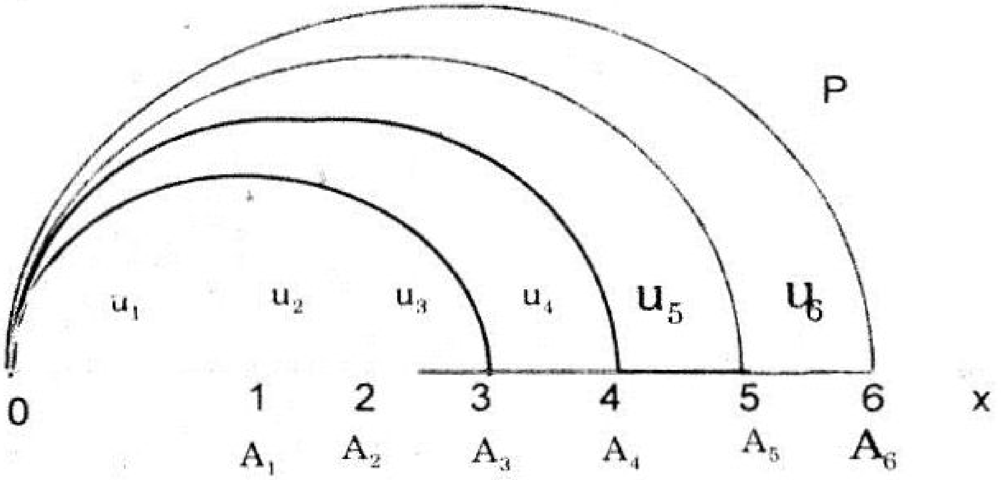
b) Tương tự $\forall n \geq 2$ ta có: $u_n = an + b$, $u_{n-1} = an + b - a$

$\Rightarrow \forall n \geq 2$, $u_n - u_{n-1} = (an + b) - (an + b - a)$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + a$

$\Leftrightarrow$ (u_n) là cấp số cộng với công sai d = a.

Bài 20. Trên tia Ox lấy các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sao cho mỗi số nguyên dương n, $OA_n = n$. Trong cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa tia Ox, vẽ các nửa đường tròn đường kính OA_n, n = 1,2,..... Kí hiệu u_1 là diện tích của nửa hình tròn đường kính OA_1 và với mỗi $n \geq 2$, kí hiệu u_n là diện tích của hình giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính OA_{n-1}, nửa đường tròn đường kính OA_n và tia Ox (h 3.3)



hình 3. 3

Chứng minh rằng dãy số (u_n) là cấp số cộng. Hãy xác định công sai của cấp số cộng đó.

Hướng dẫn giải

Gọi $s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ...$ lần lượt là diện tích của các nửa đường tròn đường kính $OA_1, OA_2, OA_3, ..., OA_n, ...$

$$\Rightarrow u_1 = s_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{OA_1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$$

$$u_2 = s_2 - s_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{OA_2}{2}\right)^2 - s_1 = 3\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = u_1 + \frac{\pi}{4}.$$

$$u_3 = s_3 - s_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{OA_3}{2}\right)^2 - s_2 = \frac{9\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = u_2 + \frac{\pi}{4}.$$

$$= s_n - s_{n-1} = \ldots = u_{n-1} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow u_n = u_{n-1} + \frac{\pi}{4},\ n \geq 2.$$

$\Leftrightarrow (u_n)$ là cấp số cộng và công sai $d = \frac{\pi}{4}$.

Bài 21. Trong mỗi câu sau, hãy đánh dấu "x" vào phần kết luận mà em cho là đúng.

a) Mỗi cấp số cộng với công sai d > 0 là một dãy số:

☐ Tăng . ☐ Giảm. ☐ Không tăng cũng không giảm.

b) Mỗi cấp số cộng với công sai d < 0 là một dãy số:

☐ Tăng ☐ Giảm. ☐ Không tăng cũng không giảm.

Giải

a) Cấp số cộng (u_n) có công sai $d > 0$

$\Rightarrow u_n = u_{n-1} + d > u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow (u_n)$ là dãy số tăng.

☒ Tăng

b) Cấp số cộng u_n có công sai $d < 0$

$\Rightarrow u_n = u_{n-1} + d < u_{n-1}, \forall n \ge 2$.

$\Leftrightarrow (u_n)$ là dãy số giảm

☒ Giảm

Bài 22 Một cấp số cộng có 5 số hạng, mà tổng số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 28, tổng của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng 40. Hãy tìm cấp số cộng đó.

Giải

Gọi cấp số cộng đó là: $u_1; u_2; u_3; u_4; u_5$ với công sai d

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} u_1 + u_3 = 28 \\ u_3 + u_5 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 2d = 28 \\ u_1 + 2d + u_1 + 4d = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 11 \\ d = 3 \end{cases}$

Vậy, cấp số cộng là : 11; 14; 17; 20; 23.

Bài 23. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{20} = -52$ và $u_{51} = -145$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

Giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n) ta có:

$$\begin{cases} u_{20} = -52 \\ u_{51} = -145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 19d = -52 \\ u_1 + 50d = -145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = -3 \end{cases}$$

Áp dụng công thức: $u_n = u_1 + (n-1)d$, $n \ge 1$, ta có được:

Vậy, $u_1 = 5 + (n-1)(-3)$, $n \ge 1$ $\Leftrightarrow u_n = -n + 8$, $n \ge 1$.

Bài 24. Cho cấp số cộng (u_n) với công sai d và cho các số nguyên dương m và k với $m \ge k$. Chứng minh rằng $u_m = u_k + (m-k)d$

Áp dụng: Hãy tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) mà $u_{18} - u_3 = 75$

Giải

Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, $n \ge 1$

$\Rightarrow u_m - u_k = u_1 + (m-1)d - [u_1 + (k-1)d] = (m-k)d$, mọi $m \ge k$, $m, k \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow u_m = u_k + (m-k)d \quad m \ge k$, $m, k \in \mathbb{N}^*$.

Áp dụng: $u_{18} - u_3 = 75$

$\Leftrightarrow (18-3)d = 75 \Leftrightarrow d = 5$.

Bài 25. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 - u_3 = 6$ và $u_5 = -10$. Tìm công sai và số hạng tổng quát của cấp số đó.

Giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n) . ta có:

$$\begin{cases} u_1 - u_3 = 6 \\ u_5 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) = 6 \\ u_1 + 4d = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = -3 \end{cases}$$

Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, $n \geq 1$

$$\Rightarrow u_n = 2 + (n-1)(-3),\ n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow u_n = -3n + 5,\ n \geq 1$$

Vậy công sai $d = -3$ và $u_n = -3n + 5$, $n \geq 1$.

Bài 26. Hãy chứng minh định lý 3.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_1 = u_1; u_2 = u_1 + d; u_3 = u_1 + 2d; \ldots; u_n = u_1 + (n-1)d$

$$\Rightarrow S_n = nu_1 + \left[d + 2d + 3d + \ldots + (n-1)d\right]$$

$$= nu_1 + d\left[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)\right]$$

$$= nu_1 + d\frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}\left[u_1 + u_1 + (n-1)d\right]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}\left[u_1 + u_n\right].$$

Bài 27. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 + u_{22} = 60$. Hãy tính tổng của 23 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Giải

Ta có: $u_{23} = u_{22} + d$ (d là công sai của cấp số cộng (u_n))

$$u_1 = u_2 - d$$

$$\Rightarrow u_{23} + u_1 = u_2 + u_{22}$$

$$\Rightarrow S_{23} = \frac{23}{2}(u_1 + u_{23}) = \frac{23}{2}(u_2 + u_{22}) = \frac{23}{2}.60$$

$$\Rightarrow S_{23} = 690.$$

Bài 28. Số đo ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm số đo của ba góc đó.

Giải

Giả sử tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ lập thành cấp số cộng nên:

$$\begin{cases} \hat{A} = 90^0 \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \\ \hat{B} = \dfrac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = 90^0 \\ \hat{B} = 60^0 \\ \hat{C} = 30^0. \end{cases}$$

Vậy các góc của tam giác vuông đó là: 30^0, 60^0, 90^0.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho (u_n) là cấp số cộng biết $u_3 = -15$ và $u_{14} = 18$. Tìm u_1?

(A) -21 ; (B) -22 ;

(C) -23 ; (D) -24.

Câu 2. Cho (u_n) là cấp số cộng biết $u_2 + u_5 - u_3 = 10$ và $u_4 + u_6 = 26$. Tìm số hạng đầu và công sai d của cấp số cộng đó?

(A) $u_1 = -1, d = 3$; (B $u_1 = 1, d = 3$;

(C) $u_1 = 1, d = -3$; (D) $u_1 = -1, d = -3$.

Câu 3. Trong các dãy số (u_n) cho bởi u_n sau đây, dãy số nào là cấp số cộng?

(A) $u_n = 5 - 2\sqrt{n}$; (B) $u_n = n^2 + 1$;

(C) $u_n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; (D) $u_n = \dfrac{7 + 3n}{5}$.

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n). Biết số hạng đầu bằng 9, số hạng cuối bằng 49 và công sai $d = 2$. Cấp số có:

(A) 21 số hạng ; (B) 23 số hạng ;

(C) 20 số hạng ; (D) 28 số hạng .

Câu 5. Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ 3 có 3 cây, v. v...Hỏi có bao nhiêu hàng?

(A) 75 ; (B) 74 ; (C) 77 ; (D) 76.

IV. ĐÁP ÁN.

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(B)	(D)	(A)	(C)

§4. CẤP SỐ NHÂN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa:

– (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow \forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1}.q$

– q là số không đổi gọi là công bội của cấp số nhân.

2. Tính chất.

– (u_n) là cấp số nhân, mọi số $k \geq 2$, nguyên dương ta có

$$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$$

– Chú ý: cấp số nhân hữu hạn thì số hạng đầu và số hạng cuối không có tính chất trên.

3. Số hạng tổng quát.

Cho (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q. Khi đó:

$$u_n = u_1.q^{n-1},\ n \geq 1$$

4. Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân.

– (u_n) là cấp số nhân với công bội q, $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.

$$\Rightarrow S_n = u_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}.\ n \geq 1$$

– Đặc biệt $q = 1 \Rightarrow S_n = n.u_1$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 29. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân. Hãy xác định công bội của cấp số nhân đó.

a) Dãy số 1, –2, 4, –8, 16, –32, 64 ; b) Dãy số (u_n) với $u_n = n.6^{n+1}$;

c) Dãy số (v_n) với $v_n = (-1)^n.3^{2n}$; d) Dãy số (x_n) với $x_n = (-4)^{2n-1}$.

Giải

a) Ta có: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \frac{u_5}{u_4} = \frac{u_6}{u_5} = \frac{u_7}{u_6} = -2$

$\Rightarrow$ **$u_n = u_{n-1}.(-2)$, n = 2, 3, 4, 5, 6, 7.**

$\Leftrightarrow$ 1, –2, 4, –8, 16, –32, 64 là một cấp số nhân với công bội q = -2.

b) $\forall n \geq 2$ **ta có :** $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n.6^{n+1}}{(n-1).6^n} = \frac{6n}{n+1}$ **phụ thuộc vào n.**

=> (u_n) không phải là một cấp số nhân.

c) $\forall n \geq 2$ ta có: $\dfrac{v_n}{v_{n-1}} = \dfrac{(-1)^n.3^{2n}}{(-1)^{n-1}.3^{2(n-1)}} = -9$.

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2$, $v_n = v_{n-1}.(-9)$.

$\Leftrightarrow$ (v_n) là một cấp số nhân với công bội $q = -9$.

d) $\forall n \geq 2$ ta có: $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \dfrac{(-4)^{2n+1}}{(-4)^{2(n-1)+1}} = 16$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2$, $x_n = x_{n-1}.16$

$\Leftrightarrow$ (x_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 16$.

Bài 30. Trong mỗi câu sau, hãy đánh dấu "x" vào kết luận mà em cho là đúng :

a) Mỗi cấp số nhân có số hạng đầu dương và công bội $0 < q < 1$ là một dãy số.

☐ Tăng. ☐ Giảm. ☐ Không tăng không giảm.

b) Mỗi cấp số nhân có số hạng đầu dương và công bội $q > 1$ là một dãy số.

☐ Tăng. ☐ Giảm. ☐ Không tăng không giảm.

Giải

a) $\forall n \geq 2$, $u_n = u_{n-1}.q < u_{n-1}$ (do $0 < q < 1$)

$\Leftrightarrow$ (u_n) là dãy số giảm.

☒ Giảm

b) $\forall n \geq 2$, $u_n = u_{n-1}.q > u_{n-1}$ (do $q > 1$)

$\Leftrightarrow$ (u_n) là dãy số tăng.

☒ Tăng.

Bài 31. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội $q < 0$ biết $u_2 = 4$ và $u_4 = 9$, hãy tìm u_1.

Giải

Ta có: $\begin{cases} u_4 = 9 \\ u_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^3 = 9 \\ u_1.q = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = \dfrac{9}{4} \\ u_1 q = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} q = -\dfrac{3}{2} \\ q = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \\ u_1 = \dfrac{4}{q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\dfrac{3}{2} \text{(do q< 0)} \\ u_1 = -\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Vậy $u_1 = -\dfrac{8}{3}$.

Bài 32. Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên dương. Tích của số hạng đầu và số hạng thứ 3 bằng 1, tích của số hạng thứ 3 và số hạng cuối bằng $\frac{1}{16}$. Tìm cấp số nhân đó.

Giải

Gọi cấp số nhân là u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 với công bội q.

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1.u_3 = 1 \\ u_3.u_5 = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2.q^2 = 1 \\ u_1^2.q^6 = \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow q = \pm\frac{1}{2}$$

Do u_1, $u_2 > 0 \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} > 0$, nên $q = \frac{1}{2}$

Thay vào $u_1^2.q^2 = 1 \Rightarrow u_1 = 2$ (do $u_1 > 0$)

Vậy cấp số nhân là: $2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.

Bài 33. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 0$ và $u_1 \neq 0$. Cho các số nguyên dương m và k, $m \geq k$. Chứng minh rằng $u_m = u_k.q^{m-k}$

Áp dụng :

a) Tìm công bội q của cấp số nhân (u_n) biết $u_4 = 2$ và $u_7 = -686$

b) Hỏi có tồn tại hay không một cấp số nhân (u_n) mà $u_2 = 5$ và $u_{22} = -2000$?

Giải

Mọi số nguyên dương m, k, $m \geq k$ ta có:

$$\frac{u_m}{u_k} = \frac{u_1.q^{m-1}}{u_1.q^{k-1}} = q^{m-k}. \Leftrightarrow u_m = u_k.q^{m-k}$$

a) Áp dụng ta có: $u_7 = u_4.q^{7-4} \Leftrightarrow q^3 = \frac{u_7}{u_4} = -343. \Leftrightarrow q = -7$

b) Áp dụng ta có: $u_{22} = u_2.q^{22-2} \Leftrightarrow q^{20} = \frac{u_{22}}{u_2} = \frac{-2000}{5} = -400 < 0$

$$\Leftrightarrow q^{20} = -400 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy không tồn tại cấp số nhân (u_n) mà $u_2 = 5$ và $u_{22} = -2000$.

Bài 34. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân (u_n) biết $u_3 = -5$ và $u_6 = 135$.

Giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n), ta có :

$$\begin{cases} u_6 = 135 \\ u_3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^5 = 135 \\ u_1.q^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = -27 \\ u_1 = -\frac{5}{q^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -3 \\ u_1 = -\frac{5}{9} \end{cases}.$$

Áp dụng công thức $u_n = u_1.q^{n-1}$, $n \geq 1$

$$\Rightarrow u_n = -\frac{5}{9}(-3)^{n-1},\ n \geq 1;\ \Leftrightarrow u_n = -5(-3)^{n-3},\ n \geq 1.$$

Bài 35. Chu kỳ bán ra của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Tính (chính xác đến hàng phần trăm) khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm).

Giải

- Gọi u_n khối lượng còn lại của nguyên tố poloni sau n.138 ngày.

Ta có: $u_1 = \frac{1}{2}.20 = 10$ (gam).

- Theo bài ra ta có $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{53}$ là một cấp số nhân với công bội

$q = \frac{1}{2}$; $\left(53 = \frac{7314}{138}\right)$

Áp dụng công thức $u_n = u_1.q^{n-1},\ n \geq 1$

$\Rightarrow u_{53} = u_1.\left(\frac{1}{2}\right)^{53-1} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{52},\ n \geq 1$

$\Rightarrow u_{53} \approx 2,22.10^{-15}$ (gam)

Vậy lượng poloni 210 còn lại sau 7314 ngày là: $u_{53} \approx 2,22.10^{-15}$ (gam)

Bài 36. Tính các tổng sau:

a) Tổng tất cả các số hạng của cấp số nhân biết rằng số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ 2 bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366 ;

b) Tổng tất cả các số hạng của cấp số nhân biết rằng số hạng đầu bằng $\frac{1}{256}$, số hạng thứ 2 bằng $\frac{-1}{512}$ và số hạng cuối bằng $\frac{1}{1048576}$.

Giải

a) Cấp số nhân là: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$. Với công bội q.

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} u_1 = 18 \\ u_2 = 54 \\ u_n = 39366 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 18 \\ q = \dfrac{u_2}{u_1} = 3 \\ u_1.q^{n-1} = 39.366 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 18 \\ q = 3 \\ n = 8 \end{cases}$

$\Rightarrow S_8 = u_1.\frac{q^8 - 1}{q - 1} = 18\frac{3^8 - 1}{2} = 59040$

b) Tương tự a) ta có: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{256} \\ u_2 = \dfrac{-1}{512} \\ u_n = \dfrac{1}{1048576} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{256} \\ q = -\dfrac{1}{2} \\ n = 13 \end{cases}$

$$\Rightarrow S_{13} = u_1 . \frac{q^{13} - 1}{q - 1} = \frac{1}{256} . \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{13} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{2731}{1048576}$$

Bài 37. Số đo bốn góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm 4 góc đó biết rằng số đo góc lớn nhất gấp 8 lần số đo góc nhỏ nhất.

Giải

Gọi các góc của tứ giác là $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ và theo thứ tự này lập thành cấp số nhân với công bội q > 0. Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^0 \\ \widehat{D} = 8.\widehat{A} \\ \widehat{A}.\widehat{C} = \widehat{B}^2 \\ \widehat{B}.\widehat{D} = \widehat{C}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A}\left(1 + q + q^2 + q^3\right) = 360^0 \\ q^3\widehat{A} = 8\widehat{A} \\ \widehat{A}.\widehat{C} = \widehat{B}^2 \\ \widehat{B}.\widehat{D} = \widehat{C}^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow q = 2, \widehat{A} = 24^0, \widehat{B} = 48^0, \widehat{C} = 96^0, \widehat{D} = 192^0$.

Các góc của tứ giác đó là: 24°, 48°, 96°, 192°.

LUYỆN TẬP

Bài 38. Hãy chọn những khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây:

a) Nếu các số thực a, b, c mà $abc \neq 0$, theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0 thì các số $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ cũng theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

b) Nếu các các số thực a, b, c mà $abc \neq 0$, theo thứ tự lập thành cấp số nhân thì các số $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

c) $1 + \pi + \pi^2 + \pi^3 + ... + \pi^{100} = \frac{\pi^{100} - 1}{\pi - 1}$.

Giải

a) Khẳng định này sai vì : a, b, c lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.

$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{a + c}{ac} = \frac{2b}{ac} \neq \frac{2}{b}$

b) Khẳng định này đúng vì : a, b, c lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow a.c = b^2$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{ac} = \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}\right) = \left(\frac{1}{b}\right)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ lập thành cấp số nhân.

c) Ta có: $1, \pi, \pi^2, \pi^3, ..., \pi^{99}$ là cấp số nhân với công bội $q = \pi$, $u_1 = 1$.

$\Rightarrow S_{100} = u_1.\dfrac{q^{100} - 1}{q - 1} = \dfrac{\pi^{100} - 1}{\pi - 1}$. Vậy khẳng định đã cho là **đúng**.

Bài 39. Cho các số $x + 6y$; $5x + 2y$; $8x + y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng, đồng thời các số $x - 1$, $y + 2$, $x - 3y$ lập thành cấp số nhân. Hãy tìm x và y.

Giải

Theo bài ra, ta có: $\begin{cases}(x + 6y) + (8x + y) = 2(5x + 2y)\\(x - 1)(x - 3y) = (y + 2)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x = 3y\\(y + 2)^2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -6\\y = -2\end{cases}$. Vậy $x = -6$ và $y = -2$.

Bài 40. Cho cấp số cộng (u_n) với công sai khác 0. Biết rằng các số u_1u_2, u_2u_3 và u_3u_1 theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân với công bội $q \neq 0$. Hãy tìm q.

Giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n), $d \neq 0$, ta có:

$u_2 = u_1 + d$, $u_3 = u_1 + 2d$

Do u_1u_2, u_2u_3, u_3u_1 là cấp số nhân nên:

$(u_2.u_3)^2 = (u_1.u_2)(u_3.u_1)$

$\Leftrightarrow \left[(u_1 + 1)(u_1 + 2d)\right]^2 = u_1^2(u_1 + d)(u_1 + 2d)$

$\Leftrightarrow 3u_1d + 2d^2 = 0$ (do $d \neq 0$) $\Leftrightarrow 3u_1 + 2d = 0 \Leftrightarrow u_1 = -\dfrac{2}{3}d$

$$\Rightarrow \text{công bội } q = \frac{u_2.u_3}{u_1.u_2} = \frac{u_3}{u_1} = \frac{u_1 + 2d}{u_1} = \frac{-\dfrac{2}{3}d + 2d}{-\dfrac{2}{3}d} = -2.$$

Vậy $q = -2$.

Bài 41. Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0, theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân đó.

Giải

Ta có u_2, u_1, u_3 lập thành cấp số cộng với công sai $d \neq 0$.

$\Rightarrow u_2 = u_1 + d$, $u_3 = u_1 + 2d$.

Do u_1, u_2, u_3 lập thành một cấp số nhân ta có:

$u_3.u_2 = u_1^2 \Leftrightarrow (u_1 + d)(u_1 + 2d) = u_1^2$

$\Leftrightarrow 3du_1 + 2d^2 = 0 \Leftrightarrow 3u_1 + 2d = 0$ (do $d \neq 0$)

$\Leftrightarrow u_1 = -\dfrac{2}{3}d$

⇒ công bội q của cấp số nhân u_2, u_1, u_3 là:

$$q = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1}{u_1 + d} = \frac{-\frac{2}{3}d}{-\frac{2}{3}d + d} = -2.$$

Vậy $q = -2$.

Bài 42. Hãy tìm ba số hạng đầu tiên của một cấp số nhân, biết rằng tổng của chúng bằng $\frac{148}{9}$, và đồng thời các số hạng đó tương ứng là số hạng đầu, số hạng thứ tư và số hạng thứ tám của cấp số cộng.

Giải

. Gọi q là công bội của cấp số nhân u_1, u_2, u_3,.....

$$\Rightarrow \frac{148}{9} = u_1 + u_2 + u_3 \Leftrightarrow \frac{148}{9} = u_1\left(q^2 + q + 1\right) \ (1)$$

Mặt khác ta có: $\begin{cases} u_2 = u_1 + 3d \\ u_3 = u_1 + 7d \end{cases}$ (với d là công sai của cấp số cộng).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_3 - u_1 = 7d \\ u_2 - u_1 = 3d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(q^2 - 1\right) = 7d \\ u_1\left(q - 1\right) = 3d \end{cases}, (d \neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{q^2 - 1}{q - 1} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow q + 1 = \frac{7}{3} \Leftrightarrow q = \frac{4}{3}$$. Thay vào (1)

$\Rightarrow u_1 = 4$. Vậy $u_1 = 4$, $u_2 = \frac{16}{3}$, $u_3 = \frac{64}{9}$.

. Nếu $d = 0 \Rightarrow q = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{148}{27}$, $u_2 = \frac{148}{27}$, $u_3 = \frac{148}{27}$.

Bài 43. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 5u_n + 8$, $\forall n \geq 1$

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n): $v_n = u_n + 2$ là một cấp số nhân.. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đó.

b) Dựa vào kết quả phần a), hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Giải

a) Hiển nhiên ta có: $u_{n+1} = 5u_n + 8 > u_n$, $\forall n \geq 1$

$\Leftrightarrow$ Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

$\Leftrightarrow .... > u_n > ... > u_2 > u_1 = 1 > 0$

$\Rightarrow v_n = u_n + 2 > 0, \forall n \in N^*$. Từ đó ta suy ra.

$$\forall n \geq 1 \text{ thì } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_n + 2} = \frac{5.u_n + 8 + 2}{u_n + 2} = 5.$$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 1,\ v_{n+1} = v_n.5$

$\Leftrightarrow (v_n)$ là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = 5$.

Ta có: $v_1 = u_1 + 2 = 3$

Áp dụng: $v_n = v_1.q^{n-1}$, $n \geq 1 \Rightarrow v_n = 3.5^{n-1}$, $n \geq 1$

b) Từ câu a) $v_n = u_n + 2 \Leftrightarrow u_n = v_n - 2$

$\Leftrightarrow u_n = 3.5^{n-1} - 2$, $n \geq 1$

Vậy $u_n = 3.5^{n-1} - 2$, $n \geq 1$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n), với $u_3 = 3$ và $u_6 = 81$. **Khẳng định nào đúng?**

(A) $u_1 = 1, q = -3$; (B) $u_1 = \frac{1}{3}, q = -3$;

(C) $u = -3, q = \frac{1}{3}$; (D) $u_1 = -\frac{1}{3}, q = 3$.

Câu 2. Cấp số nhân có 8 số hạng, biết số hạng đầu bằng **10, số hạng cuối** bằng 1280. Tổng của các số hạng là:

(A) S = 2541 ; (B) S = 2543 ; (C) S = 2549 ; **(D) S = 1550.**

Câu 3. Cho a, b, c, d thứ tự lập thành cấp số nhân. Giá **trị của biểu thức**

$A = (a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 + (a - d)^2$ bằng

(A) al ; (B) 1 ; (C) 0 ; **(D) 2.**

Câu 4 . Tổng $S = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111...11}_{n \text{ số } 1}$ bằng:

(A) $\frac{1}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right]$; (B) $\frac{1}{9}\left[\frac{9(10^{n-1} - 1)}{9} - 9\right]$;

(C) $\frac{1}{9}\left[\frac{10^n - 1}{9} - n\right]$; (D) $\frac{1}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10} - n\right]$.

Câu 5. Ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân thỏa **mãn tổng của chúng** bằng 65 và tích của chúng bằng 3375. Ba số đó là:

(A) 4, 12, 36 ; (B) 5, 15, 45 ;

(C) 6, 18, 48 ; (D) 3, 9, 27 .

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(D)	(C)	(A)	(B)

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài 44. Chứng minh rằng

$1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + ... + (n-1).n^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$, với mọi số nguyên $n \geq 2$.

Giải

Khi $n = 2$, ta có vế trái bằng 4, vế phải $\dfrac{2(2^2-1)(3.2+2)}{12} = 4 \Rightarrow$ đẳng thức đúng với $n = 2$.

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là:

$$1.2^2 + 2.3^2 + ... + (k-1)k^2 = \frac{k(k^2-1)(3k+2)}{12}$$

Ta có: $1.2^2 + 2.3^2 + ... + (k-1)k^2 = \dfrac{k(k^2-1)(3k+2)}{12} + k(k+1)^2$

$$= \frac{(k+1)\left[(k+1)^2-1\right]\left[3(k+1)+2\right]}{12}$$

Ta đó suy ra đẳng thức đúng với $n = k + 1 \geq 3$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + ... + (n-1).n^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$, với mọi số nguyên $n \geq 2$.

Bài 45. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$u_1 = 2$ và $u_n = \dfrac{u_{n-1}+1}{2}$ với mọi $n \geq 2$.

Chứng minh rằng $u_n = \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$ với mọi số nguyên dương n.

Giải

Khi $n = 1 \Rightarrow u_1 = \dfrac{2^0+1}{2^0} = 2$ đúng.

Giả sử $u_k = \dfrac{2^{k-1}+1}{2^{k-1}}$, với mọi số nguyên $k \geq 1$. Ta có:

$u_{k+1} = \dfrac{u_k+1}{2} = \dfrac{2^{(k+1)-1}+1}{2^{(k+1)-1}}, \forall k \geq 1$. Từ đây suy ra đẳng thức cần chứng minh đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có:

$u_n = \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$ với mọi số nguyên dương n

Bài 46. Cho các dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$ và $v_n = \dfrac{2n}{n+1}$

a) Xác định số hạng tổng quát của dãy số (a_n) với $a_n = u_n + v_n$.

b) Xác định số hạng tổng quát của dãy số (b_n) với $b_n = u_n - v_n$.

c) Xác định số hạng tổng quát của dãy số (c_n) với $c_n = u_n.v_n$.

d) Xác định số hạng tổng quát của dãy số (d_n) với $d_n = \frac{u_n}{v_n}$.

Giải

a) $\forall n \geq 1$, ta có $a_n = u_n + v_n = \frac{n^2+1}{n+1} + \frac{2n}{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n+1} = n+1$

Vậy nên: $a_n = n + 1$, $n \geq 1$.

b) Tương tự: $b_n = u_n - v_n = \frac{n^2+1}{n+1} - \frac{2n}{n+1} = \frac{(n-1)^2}{n+1}$

$\Rightarrow b_n = \frac{(n-1)^2}{n+1}, n \geq 1$.

c) $c_n = u_n.v_n = \frac{n^2+1}{n+1}.\frac{2n}{n+1} = \frac{2n(n^2+1)}{(n+1)^2}$, $\forall n \geq 1$.

d) $d_n = \frac{u_n}{v_n} = \dfrac{\frac{n^2+1}{n+1}}{\frac{2n}{n+1}} = \frac{n^2+1}{2n}$, $\forall n \geq 1$.

Bài 47. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng, dãy số nào là cấp số nhân? Xác định công sai hoặc công bội của mỗi cấp số đó.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 8n + 3$;

b) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$;

c) Dãy số (u_n) với $u_n = 3.8^n$;

d) Dãy số (u_n) với $u_n = (n+2)3^n$.

Giải

a) $\forall n \geq 2$, $u_n - u_{n-1} = 8n + 3 - [8(n-1)+3] = 8$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + 8$.

$\Leftrightarrow (u_n)$ là một cấp số cộng với công sai $d = 8$.

Từ (a) dễ thấy (u_n) không là một cấp số nhân.

b) $\forall n \geq 2$, $u_n - u_{n-1} = n^2 + n + 1 - \left[(n-1)^2 + (n-1) + 1\right] = 2n$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + 2n$

=> (u_n) không là cấp số cộng.

Tương tự: $\forall n \geq 2$ $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)$.

=> (u_n) không là cấp số nhân.

c) $\forall n \geq 2,\ u_n - u_{n-1} = 3.8^n - 3.8^{n-1} = (3.8-3).8^{n-1} = 21.8^{n-1}$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1} + 21.8^{n-1}$

=> (u_n) không là cấp số cộng .

$\forall n \geq 2,\ \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{3.8^n}{3.8^{n-1}} = 8$.

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1}.8$

=> (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 8$.

d) $\forall n \geq 2,\ u_n - u_{n-1} = (n+2).3^n - (n-1+2).3^{n-1} = (2n+5).3^{n-1}$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1} + (2n+5).3^{n-1}$.

=> (u_n) không là cấp số cộng

. $\forall n \geq 2,\ \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(n+2).3^n}{(n-1+2).3^{n-1}} = \frac{3(n+2)}{n+1}$.

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1}.\frac{3(n+2)}{n+1}$

=> (u_n) không là cấp số nhân.

Bài 48. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây:

a) Dãy số (u_n) xác định bởi

$u_1 = 3$ và $u_{n+1} = u_n + 5$, $\forall n \geq 1$, là một cấp số cộng.

b) Dãy số (u_n) xác định bởi

$u_1 = 3$ và $u_{n+1} = u_n + n$, $\forall n \geq 1$, là một cấp số cộng.

c) Dãy số (u_n) xác định bởi

$u_1 = 4$ và $u_{n+1} = 5.u_n$, $\forall n \geq 1$, là một cấp số nhân

d) Dãy số (u_n) xác định bởi

$u_1 = 1$ và $u_{n+1} = n.u_n$, $\forall n \geq 1$, là một cấp số nhân.

Giải

a) Đây là khẳng định đúng, vì :

$u_{n+1} = u_n + 5$, $\forall n \geq 1$ là một cấp số cộng với công sai $d = 5$.

b) Đây là khẳng định sai, vì :

$u_{n+1} = u_n + n$, $\forall n \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = n$ thay đổi, $\forall n \geq 1$.

c) Đây là khẳng định đúng, vì :

$u_{n+1} = 5.u_n$, $\forall n \geq 1$ là một cấp số nhân với công bội $q = 5$.

d) Đây là khẳng định sai, vì :

$u_{n+1} = n.u_n$, $\forall n \geq 1 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = n$ thay đổi, $\forall n \geq 1$.

Bài 49. Cho dãy hình vuông $H_1, H_2, H_3, ...$ với mỗi số nguyên dương n, gọi u_n, p_n, s_n lần lượt là độ dài cạnh, chu vi và diện tích của hình vuông H_n.

a) Giả sử (u_n) là một cấp số cộng với công sai khác 0. Hỏi khi đó các dãy số (p_n) và (s_n) có phải là cấp số cộng hay không? Vì sao?

b) Giả sử dãy số (u_n) là một cấp số nhân với công bội dương. Hỏi khi đó các dãy số (p_n) và (s_n) có phải là một cấp số nhân hay không? Vì sao?

Giải

a) (u_n) là cấp số cộng với công sai $d \neq 0$. Ta có: $u_n = u_{n-1} + d$, $\forall n \geq 2$.

Ta có: $p_n = 4.u_n = 4(u_{n-1} + d) = p_{n-1} + 4d$

$\Leftrightarrow p_n = p_{n-1} + 4d$, $\forall n \geq 2$

$\Leftrightarrow (p_n)$ là một cấp số cộng với công sai $d' = 4d$

Ta có: $s_n = u_n^2 = (u_{n-1} + d)^2 = u_{n-1}^2 + 2u_{n-1}.d + d^2$.

$\Leftrightarrow s_n = s_{n-1} + 2u_{n-1}.d + d^2$, $\forall n \geq 2$.

=> (s_n) không là cấp số cộng.

b) (p_n) và (s_n) đều là cấp số nhân. Khi (u_n) là cấp số nhân với công bội $q > 0$. Vì :

$p_n = 4.u_n = 4(u_{n-1}.q) = 4u_{n-1}.q$

$\Leftrightarrow p_n = p_{n-1}.(q)$, $\forall n \geq 2$

=> (p_n) là một cấp số nhân với công bội $q' = q$

$s_n = (u_n)^2 = (u_{n-1}.q)^2 = u_{n-1}^2.q^2$

$s_n = s_{n-1}.q^2$, $\forall n \geq 2$

=> (s_n) là một cấp số nhân với công bội $q'' = q^2$

Bài 50. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$u_1 = 3$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$, $\forall n \geq 1$

Chứng minh rằng (u_n) vừa là cấp số cộng, vừa là cấp số nhân.

Giải

Ta có: $u_1 = 3, u_2 = \sqrt{u_1 + 6} = 3, u_3 = \sqrt{u_2 + 6} = 3, ...u_n = \sqrt{u_{n-1} + 6} = 3, ...$

=> Số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = 3$, $\forall n \geq 1$ (*)

Thật vậy:

Khi $n = 1 \Rightarrow u_1 = 3$ đúng.

Giả sử (*) đúng với $n = k + 1 \geq 2$, $k \in \mathbb{N}^*$. Ta có $u_k = 3$.

$\Rightarrow u_{k+1} = \sqrt{u_k + 6} = \sqrt{3 + 6} = 3$

=> (*) cũng đúng với $n = k + 1 \geq 2$, $k \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số không đổi với $u_n = 3$, $n \geq 1$.

=> (u_n) vừa là cấp số cộng, vừa là cấp số nhân.

Bài 51. Tìm hiểu tiền công khoan giếng ở hai cơ sở khoan giếng, người ta được biết:

– Ở cơ sở A: Giá của mét khoan đầu tiên là 8000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 500 đồng so với giá của mét khoan ngay trước nó.

– Ở cơ sở B: Giá của mét khoan đầu tiên là 6000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 7% giá của mét khoan ngay trước nó.

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu u_n và v_n tương ứng là giá của mét khoan thứ n theo cách tính giá của cơ sở A và của cơ sở B.

a) Hãy tính u_2, u_3, v_2, v_3.

b) Chứng minh rằng dãy số (u_n) là một cấp số cộng và dãy số (v_n) là một cấp số nhân. Hãy tìm số hạng tổng quát của mỗi dãy số đó.

c) Một người muốn chọn một trong hai cơ sở nói trên để thuê khoan một giếng sâu 20 mét lấy nước dùng cho sinh hoạt của gia đình. Hỏi người ấy nên chọn cơ sở nào, nếu chất lượng cũng như thời gian khoan giếng của hai cơ sở là như nhau?

d) Cũng câu hỏi như phần c), với giả thiết độ sâu của giếng cần khoan là 25 mét.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $u_1 = 8000 \Rightarrow u_2 = 8000 + 500 = 8500$

$$u_3 = 8500 + 500 = 9000$$

$$v_1 = 6000 \Rightarrow v_2 = 6000 + \frac{7}{100}.6000 = 6420$$

$$v_3 = 6420 + \frac{7}{100}.6420 \approx 6894.$$

b) Theo bài ra ta có:

$u_{n+1} = u_n + 500, \forall n \geq 1$

$\Leftrightarrow (u_n)$ là một cấp số cộng với công sai d= 500 và $u_1 = 8000$

Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, $n \geq 1$

$$\Rightarrow u_n = 7500 + 500n, \ \forall n \geq 1$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{7}{100}.v_n = v_n\left(1 + \frac{7}{100}\right)$$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = v_n(1,07)$, $\forall n \geq 1$

$\Leftrightarrow (v_n)$ là một cấp số nhân với công bội $q = 1,07$ và $v_1 = 6000$

Áp dụng công thức $v_n = v_1.q^{n-1}$

$$\Rightarrow v_n = 6000(1,07)^{n-1}, \ \forall n \geq 1$$

c) Số tiền phải trả cho cơ sở A khoan giếng với độ sâu 20 mét là:

$$S'_{20} = \frac{20}{2}\left[2u_1 + (20-1).500\right] = 255.000$$

Số tiền phải trả cho cơ sở B khoan giếng với độ sâu 20 mét là:

$$S_{20} = v_1\frac{q^{20}-1}{q-1} \approx 245973 < S'_{20}$$

$\Rightarrow S_{20} < S'_{20}$. Nên người đó chọn cơ sở B.

d) Tương tự ta có:

$S'_{25} < S_{25}$. Nên người đó chọn cơ sở A.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Bài 52. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai

a) Tồn tại một cấp số nhân (u_n) có $u_5 < 0$ và $u_{75} > 0$.

b) Nếu các số thực a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có công sai khác 0 thì các số a^2, b^2, c^2 theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số cộng.

b) Nếu các số thực a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân thì các số a^2, b^2, c^2 theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số nhân.

Hướng dẫn giải

a) $u_5 < 0$, $u_{75} > 0 \Rightarrow u_1^2 . q^{78} < 0$ (q là công bội) vô lí $\Rightarrow$ a, sai

b) Lấy a = 1, b = 2, c = 3 ($d = 1 \neq 0$). Khi đó $a^2 = 1$, $b^2 = 4$, $c^2 = 9$ không là cấp số cộng $\Rightarrow$ b, sai

c) Đặt $b = aq$, $c = aq^2$ (q là công bội) $\Rightarrow b^2 = a^2q^2$; $c^2 = a^2q^4 \Rightarrow a^2, b^2, c^2$ là cấp số nhân công bội $q^2 \Rightarrow$ c, đúng.

Trong các bài từ 53 đến 57, hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả đã cho.

Bài 53. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_n = u_{n-1} + 2n$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó u_{50} bằng.

(A) 1274,5; (B) 2548,5; (C) 5096,5; (D) 2550,5

Hướng dẫn giải

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = u_1 + 4, \dots, u_{50} = u_{49} + 100 \Rightarrow u_{50} = \frac{1}{2} + 4 + \dots + 100 = 2548,5$$

$\Rightarrow$ (B) đúng

Bài 54. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = -1$ và $u_n = 2n.u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó u_{11} bằng.

(A) $2^{10}.11$; (B) $-2^{10}.11!$; (C) $2^{10}.11^{10}$; (D) $-2^{10}.11^{10}$.

Hướng dẫn giải

Giải tương tự bài 53, ta có (B) đúng.

Bài 55. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 150$ và $u_n = u_{n-1} - 3$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số đó bằng: u_{11} bằng.

(A) 150 ; (B) 300 ; (C) 29850 ; (D) 59700.

Hướng dẫn giải

(u_n) là cấp số cộng công sai $d = -3 \Rightarrow u_{100} = -147 \Rightarrow S_{100} = 150 \Rightarrow$ (A) đúng.

Bài 56. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Khi đó u_{1001} bằng.

(A) 4005 ; (B) 4003 ; (C) 3 ; (D) 1.

Hướng dẫn giải

$u = 2003$, $d = -2$ nên $u_{1001} = 3 \Rightarrow$ (C) đúng.

Bài 57. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Khi đó tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng.

(A) $\dfrac{1-3^{1000}}{4}$; (B) $\dfrac{3^{1000}-1}{2}$; (C) $\dfrac{3^{1000}-1}{6}$; (D) $\dfrac{1-3^{1000}}{6}$.

Hướng dẫn giải

$u_1 = \dfrac{2}{3}$, $q = -3 \Rightarrow S_{1000} = \dfrac{1-3^{1000}}{6} \Rightarrow$ (D) đúng.

CHƯƠNG IV: GIỚI HẠN

A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

§1. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0 nếu với mỗi số dương nhỏ tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

- Ký hiệu : $\lim(u_n) = 0$ hoặc $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \to 0$.
- Nhận xét: a) $\lim(u_n) = 0 \Leftrightarrow \lim(|u_n|) = 0$

  b) Dãy số không đổi (u_n), với $u_n = 0$ có giới hạn 0.

2. Một số định lý:

- Định lý 1: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n).

  Nếu $|u_n| \leq v_n \ \forall n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.
- Định lý 2:

  Nếu $|q| \leq 1$ thì $\lim q^n = 0$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 1. Chứng minh rằng, các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0:

a) $\dfrac{(-1)^n}{n+5}$; b) $\dfrac{\sin n}{n+5}$; c) $\dfrac{\cos 2n}{\sqrt{n}+1}$.

Giải

a) Ta có: $\left|\dfrac{(-1)^n}{n+5}\right| = \dfrac{1}{n+5} < \dfrac{1}{n}$ và $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim \dfrac{(-1)^n}{n+5} = 0$.

b) Ta có: $\left|\dfrac{\sin n}{n+5}\right| \le \dfrac{1}{n+5} < \dfrac{1}{n}$ và $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim \dfrac{\sin n}{n+5} = 0$.

c) Ta có: $\left|\dfrac{\cos 2n}{\sqrt{n}+1}\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{n}+1} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ và $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ nên $\lim \dfrac{\cos 2n}{\sqrt{n}+1} = 0$.

Bài 2. Chứng minh rằng, hai dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$;

$v_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{n^2+1}$ có giới hạn 0.

Giải

Ta có: $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{1}{n}$ mà $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim \dfrac{1}{n(n+1)} = 0$.

$|v_n| = \left|\dfrac{(-1)^n \cos n}{n^2+1}\right| \le \dfrac{1}{n^2+1} < \dfrac{1}{n^2}$ và $\lim \dfrac{1}{n^2} = 0$ nên $\lim v_n = 0$.

Bài 3. Chứng minh rằng, các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn 0:

a) $u_n = (0,99)^n$; b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n+1}$; c) $u_n = \dfrac{\sin\frac{n\pi}{5}}{(1,01)^n}$.

Giải

a) Sử dụng định lý 2 ta có: $\lim (0,99)^n = 0$ vì $|0,99| < 1$.

b) $\left|\dfrac{(-1)^n}{2^n+1}\right| = \dfrac{1}{2^n+1} < \dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Mặt khác, $\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ nên $\lim \dfrac{(-1)^n}{2^n+1} = 0$.

c) $\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{5}}{(1,01)^n}\right| \le \dfrac{1}{(1,01)^n} = \left(\dfrac{1}{1,01}\right)^n$

Mặt khác, $\lim\left(\dfrac{1}{1,01}\right)^n = 0$ nên $\lim \left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{5}}{(1,01)^n}\right| = 0$.

Bài 4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{3^n}$.

a) Chứng minh rằng $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{2}{3}$ với mọi n (*)

b) Bằng phương pháp qui nạp, chứng minh rằng $0 < u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ với mọi n

c) Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0.

Hướng dẫn giải

a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}}.\frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n}$. Mặt khác, dễ chứng minh được $\frac{n+1}{3n} \le \frac{2}{3}$

Do đó : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{2}{3}$

b) Sử dụng phương pháp qui nạp toán học chứng minh $0 < u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \forall n$.

- n = 1 ta có $0 < u_1 = \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$ (* đúng với n = 1).
- Giả sử (*) đúng với n = k tức là: $0 < \frac{k}{3^k} \le \left(\frac{2}{3}\right)^k$. Ta phải chứng minh (*) đúng n = k + 1 . Thật vậy,

$u_{k+1} = \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{k}{3.3^k} + \frac{1}{3^{k+1}} > 0$. Mặt khác $u_{k+1} \le \frac{2}{3}u_k$

$\Leftrightarrow u_{k+1} \le \frac{2}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$

c) Do $0 < u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ mà $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ nên $\lim u_n = 0$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào có giới hạn 0:

(A) $u_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$; (B) $u_n = \left(-\sqrt{2}\right)^n$;

(C) $u_n = \left(\frac{4}{2+\sqrt{5}}\right)^n$; (D) $u_n = \left(-\frac{2+\sqrt{5}}{4}\right)^n$.

Câu 2. Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1).\cos 5n}{3^n}$ có giới hạn bằng :

(A) $\frac{1}{3}$; (B) -1 ; (C) $-\frac{1}{3}$; (D) 1 .

Câu 3, $\lim \dfrac{\sin\dfrac{\pi n}{6}}{3n^2+1}$ là:

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) $\dfrac{1}{3}$; (D) $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 4. $\lim \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n+5}$ là:

(A) $\dfrac{1}{5}$; (B) $-\dfrac{1}{5}$; (C) $-\dfrac{1}{3}$; (D) 0 .

Câu 5. $\lim \dfrac{n}{5^n}$ là:

(A) 0 ; (B) $\dfrac{1}{5}$; (C) 5 ; (D) 1 .

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(D)	(A)	(D)	(A)

§2. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. $\lim u_n = L$ nếu $\lim(u_n - L) = 0$ $(L \in \mathbb{R})$

Chú ý: $\lim C = C$ (C là hằng số)

2. + Nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim|u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.

+ Nếu $\lim u_n = L$, $u_n \geq 0$ $\forall n$ thì $L \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

3. Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$. Khi đó :

$\lim(u_n \pm v_n) = L \pm M$; $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{L}{M}$ $(M \neq 0)$;

$\lim(u_n.v_n) = L.M$; $\lim cu_n = cL$ (c là hằng số).

4. Xét cấp số nhân lùi vô hạn $u_1, u_1q, u_1q^2, \ldots, u_1q^n, \ldots$ có công bội q với $|q| < 1$. Khi đó, tổng của cấp số nhân trên là:

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots + u_1q^n + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 5. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(2+\frac{(-1)^n}{n+2}\right)$; b) $\lim\left(\frac{\sin 3n}{4n}-1\right)$;

c) $\lim\frac{n-1}{n}$; d) $\lim\frac{n+2}{n+1}$.

Giải

a) $\lim\left(2+\frac{(-1)^n}{n+2}\right)=2+\lim\frac{(-1)^n}{n+2}=2+0=2$ (do $\frac{\left|(-1)^n\right|}{n+2}=\frac{1}{n+2}\to 0$)

b) $\lim\left(\frac{\sin 3n}{4n}-1\right)=\lim\frac{\sin 3n}{4n}-1=-1$ (do $\left|\frac{\sin 3n}{4n}\right|\le\frac{1}{4n}\to 0$)

c) $\lim\frac{n-1}{n}=\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)=1-\lim\frac{1}{n}=1-0=1$

d) $\lim\frac{n+2}{n+1}=\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=1+\lim\frac{1}{n+1}=1+0=1$ (do $\frac{1}{1+n}<\frac{1}{n}\to 0$).

Bài 6. Tìm $\lim u_n$ với:

a) $u_n=\frac{n^2-3n+5}{2n^2-1}$; b) $u_n=\frac{-2n^2+n+2}{3n^2+5}$;

c) $u_n=\frac{\sqrt{2n^2-n}}{1-3n^2}$; d) $u_n=\frac{4^n}{2.3^n+4^n}$.

Giải

a) $\lim=\frac{n^2-3n+5}{2n^2-1}=\lim\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$.

b) $\lim=\frac{-2n^2+n+2}{3n^2+5}=\lim\frac{-2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=-\frac{2}{3}$.

c) $\lim=\frac{\sqrt{2n^2-n}}{1-3n^2}=\lim\frac{\sqrt{\frac{2}{n^4}-\frac{1}{n^3}}}{\frac{1}{n^2}-3}=\frac{0}{-3}=0$.

d) $\lim=\frac{4^n}{2.3^n+4^n}=\lim\frac{1}{2.\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=\frac{1}{1}=1$. (do $\left(\frac{3}{4}\right)^n\to 0$).

Bài 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 10$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{5} + 3 \ \forall n \geq 1$.

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - \frac{15}{4}$ là một cấp số nhân.

b) Tìm $\lim u_n$.

Giải

a) Ta có: $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{15}{4} = \left(\frac{u_n}{5} + 3\right) - \frac{15}{4} = \frac{u_n}{5} - \frac{3}{4} = \left(u_n - \frac{15}{4}\right)\frac{1}{5}$

hay $v_{n+1} = v_n . \frac{1}{5}$. Vậy (V_n) là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{5}$.

b) Ta có:

$v_1 = u_1 - \frac{15}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow v_n = v_1.q^n = \frac{25}{4}.\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Do $v_n = u_n - \frac{15}{4}$ nên $u_n = v_n + \frac{15}{4}$.

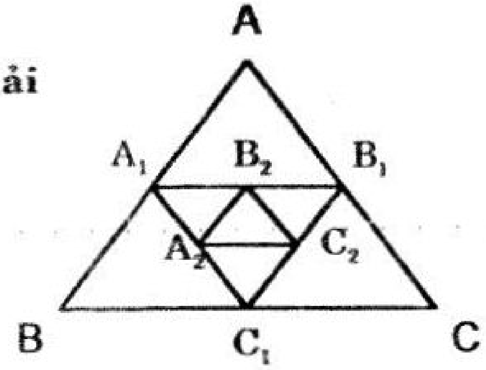
$\lim u_n = \lim v_n + \frac{15}{4} = \lim \frac{25}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{15}{4} = \frac{15}{4}$.

Bài 8. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$,...,tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$, ...Gọi P_1, P_2, ..., P_n,... và S_1, S_2, ..., S_n, ... theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_nB_nC_n$, ...

a) Tìm giới hạn của dãy số (P_n) và (S_n)

b) Tìm các tổng

$P_1, P_2, ..., P_n, ...$ và $S_1, S_2, ..., S_n, ...$



Hướng dẫn giải

a) $P = 3a$, $P_1 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}; P_2 = \frac{3a}{4}$

$..P_n = \frac{3a}{2^n}$. Do đó: $\lim P_n = 0$

Tương tự $S_n = \frac{1}{4^n}S \Rightarrow \lim S_n = 0$

b) $P_1, P_2, ..., P_n, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{2}$.

Vậy $P_1 + P_2 + ... + P_n + ... = \frac{P_1}{1-q} = \frac{\frac{3a}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3a$.

$S_1, S_2, ..., S_n, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{4}$

Vậy $S_1 + S_2 + .. + S_n + ... = \frac{S_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}S}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

Bài 9. Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

a) 0,444... ; b) 0,2121... ; c) 0,32111...

Hướng dẫn giải

a) $0,444... = \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + ... = \frac{\frac{4}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{4}{9}$.

b) $0,2121... = \frac{21}{10^2} + \frac{21}{10^4} + ... = \frac{\frac{21}{10^2}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{21}{99}$.

c) $0,32111... = 0,32 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + ... = 0,32 + \frac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{289}{900}$.

Bài 10. Gọi C là nửa đường tròn đường kính AB = 2R ;

C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$;

C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}$;...

C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}$;...

Gọi P_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

a) Tính P_n và S_n .

b) Tìm giới hạn của dãy số (P_n) và (S_n) .

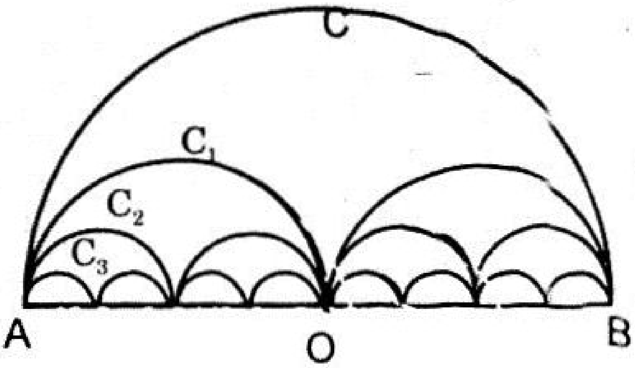
Giải

a) $P_1 = 2\pi.\frac{AB}{4} = \pi R$

$P_2 = 4\pi.\frac{AB}{8} = \pi R$

....

$P_n = 2^n.\pi.\frac{AB}{2^n} = \pi R$



$$S_n = 2^n.\frac{\pi\left(\dfrac{AB}{2^n.2}\right)^2}{2} = 2^n.\frac{\pi}{2}.\left(\frac{2.R}{2.2^n}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{2}.\frac{1}{2^n}.$$

b) . $\lim P_n = \pi R$

$$\lim S_n = \lim \frac{\pi R^2}{2}.\frac{1}{2^n} = 0.$$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. $\lim \dfrac{2n^5 + 4n - 5}{n^6 - 4n^3 + 7}$ là:

(A) 0 ; (B) 2 ; (C) -2 ; (D) $-\dfrac{5}{7}$.

Câu 2. $\lim \dfrac{(-1)^n.2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$ là:

(A) $-\dfrac{1}{3}$; (B) $\dfrac{2}{3}$; (C) 0 ; (D) 1 .

Câu 3 $\lim \dfrac{2^n + 2^{n+1} - 3^n}{2^n + 5.3^n}$ là:

(A) $\dfrac{1}{5}$; (B) $-\dfrac{1}{5}$; (C) 0 ; (D) 1 .

Câu 4 $\lim \dfrac{\sqrt[3]{3n^3 + 4n^2 - 6}}{2n + 1}$ là:

(A) 3 ; (B) 1 ; (C) $\sqrt[3]{3}$; (D) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

Câu 5. Tổng của cấp số nhân vô hạn: $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{3^3}, -\dfrac{1}{3^4}, \ldots$ là:

(A) $\dfrac{1}{4}$; (B) $\dfrac{1}{2}$; (C) $-\dfrac{1}{4}$; (D) 0 .

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(C)	(B)	(D)	(A)

§3. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: SGK

2. Định lý: Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$.

3. Một vài qui tắc tìm giới hạn vô cực.(SGK)

Chú ý: $\lim n^k = +\infty$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 11. Tìm giới hạn của dãy số (u_n), với

a) $u_n = -2n^3 + 3n + 5$; b) $u_n = \sqrt{3n^4 + 5n^3 - 7n}$

Giải

a) $u_n = -2n^3 + 3n + 5 = n^3\left(-2 + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{5}{n^3}\right)$

vì $\lim n^3 = +\infty$; $\lim\left(-2 + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{5}{n^3}\right) = -2$ nên $\lim u_n = -\infty$

b) Ta có: $3n^4 + 5n^3 - 7n = n^4\left(3 + \dfrac{5}{n} - \dfrac{7}{n^3}\right)$.

Vì $\lim n^4 = +\infty$; $\lim\left(3 + \dfrac{5}{n} - \dfrac{7}{n^3}\right) = 3$ nên $\lim n^4\left(3 + \dfrac{5}{n} - \dfrac{7}{n^3}\right) = +\infty$.

Do đó: $\lim\sqrt{3n^4 + 5n^3 - 7n} = +\infty$.

Bài 12. Tìm giới hạn của dãy số (u_n), với

a) $u_n = \dfrac{-2n^3 + 3n - 2}{3n - 2}$; b) $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12}$;

Giải

a) $\lim = \dfrac{-2n^3 + 3n - 2}{3n - 2} = \lim\dfrac{-2 + \dfrac{3}{n^2} - \dfrac{2}{n^3}}{\dfrac{3}{n^2} - \dfrac{2}{n^3}} = -\infty$ (vì $\lim\left(-2 + \dfrac{3}{n^2} - \dfrac{2}{n^3}\right) = -2$;

$\lim\left(\dfrac{3}{n^2} - \dfrac{2}{n^3}\right) = 0$ và $\left(\dfrac{3}{n^2} - \dfrac{2}{n^3}\right) > 0$)

b) $\lim = \dfrac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12} = \lim\dfrac{\sqrt[3]{1 - \dfrac{7}{n^3} - \dfrac{5}{n^5} + \dfrac{8}{n^6}}}{\dfrac{1}{n} + \dfrac{12}{n^2}} = +\infty$

(vì $\lim\sqrt[3]{1 - \dfrac{7}{n^3} - \dfrac{5}{n^5} + \dfrac{8}{n^6}} = 1 > 0$; $\lim\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{12}{n^2}\right) = 0$ và $\dfrac{1}{n} + \dfrac{12}{n^2} > 0$)

Bài 13. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim(2n + \cos n)$; b) $\lim\left(\dfrac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5\right)$.

Giải

a) Ta có: $2n + \cos n \ge 2n - 1$ mà $\lim(2n - 1) = +\infty$

nên $\lim(2n + \cos n) = +\infty$

b) Ta có: $\dfrac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5 \ge \dfrac{1}{2}n^2 - 3 + 5 = \dfrac{1}{2}n^2 + 2$

mà $\lim\left(\frac{1}{2}n^2+2\right)=+\infty$ nên $\lim\left(\frac{1}{2}n^2-3\sin 2n+5\right)=+\infty$.

Bài 14. Chứng minh rằng nếu $q>1$ thì $\lim q^n=+\infty$.

Giải

Do $q>1 \Leftrightarrow 0<\frac{1}{q}<1$ nên $\lim\frac{1}{q^n}=0$. Suy ra $\lim q^n=+\infty$

Bài 15. Tìm giới hạn của dãy số (u_n), với

a) $u_n=\dfrac{3^n+1}{2^n-1}$; b) $u_n=2^n-3^n$.

Giải

a) $$\lim\frac{3^n+1}{2^n-1}=\lim\frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n}=+\infty$$

(vì $\lim\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=1;\lim\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=0$ và $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)>0$)

b) $$\lim\left(2^n-3^n\right)=\lim 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)=-\infty$$

(vì $\lim 3^n=+\infty$; $\lim\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)=-1$).

LUYỆN TẬP

Bài 16. Tìm giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{n^2+4n-5}{3n^3+n^2+7}$; b) $\lim\dfrac{n^5+n^4-3n-2}{4n^3+6n^2+9}$;

c) $\lim\dfrac{\sqrt{2n^4+3n-2}}{2n^2-n+3}$; d) $\lim\dfrac{3^n-2.5^n}{7+3.5^n}$

Giải

a) $$\lim\frac{n^2+4n-5}{3n^3+n^2+7}=\lim\frac{\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{3+\frac{1}{n}+\frac{7}{n^3}}=0.$$

b) $\lim \dfrac{n^5+n^4-3n-2}{4n^3+6n^2+9} = \lim \dfrac{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^4}-\dfrac{2}{n^5}}{\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{6}{n^3}+\dfrac{9}{n^5}} = +\infty$.

c) $\lim \dfrac{\sqrt{2n^4+3n-2}}{2n^2-n+3} = \lim \dfrac{\sqrt{2+\dfrac{3}{n^3}-\dfrac{2}{n^4}}}{2-\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{3}{n^4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $\lim \dfrac{3^n-2.5^n}{7+3.5^n} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-2}{7\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+3} = -\dfrac{2}{3}$.

Bài 17. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(3n^3-17n+11\right)$; c) $\lim\sqrt{2n^4-n^2+n+2}$;

b) $\lim\sqrt[3]{1+2n-n^3}$; d) $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}$.

Giải

a) $\lim\left(3n^3-17n+11\right) = \lim n^3\left(3-\dfrac{17}{n^2}+\dfrac{11}{n^3}\right) = +\infty$.

b) $\lim\sqrt{2n^4-n^2+n+2} = \lim\sqrt{n^4\left(2-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^4}\right)} = +\infty$.

c) $\lim\sqrt[3]{1+2n-n^3} = \lim\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^2}-1\right)n^3} = \lim n\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^2}-1} = -\infty$.

d) $\lim\sqrt{2.3^n-n+2} = \lim\sqrt{3^n\left(2-\dfrac{n}{3^n}+\dfrac{2}{3^n}\right)} = +\infty$.

(vì $\lim 3^n = +\infty$; $\lim\dfrac{n}{3^n} = 0$; $\lim 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$).

Bài 18. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$; b) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$;

c) $\lim\left(\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n+1}\right)$; d) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}}$;

e) $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)n$; f) $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$.

Giải

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right) = \lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$

$$= \lim \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

b) $\lim \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \lim \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{(n+2)-(n+1)} = +\infty.$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n+1}\right) = \lim \frac{n^2+1}{\sqrt{n^2+n+2}+\sqrt{n+1}}$

$$= \lim \frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}} = +\infty.$$

d) $\lim \frac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}} = \lim \frac{\sqrt{3n+2}+\sqrt{2n+2}}{n}$

$$= \lim\left(\sqrt{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}\right) = 0.$$

e) $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)n = \lim \frac{(n+1-n)n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}} = +\infty.$

f) $\lim \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2} = \lim \frac{n^2-n}{(3n+2)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n+1}\right)}$

$$= \lim \frac{1-\frac{1}{n}}{\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Bài 19. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là $\frac{5}{3}$, tổng của ba số hạng đầu tiên của nó là $\frac{39}{25}$.

Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{u_1}{1-q} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow u_1 = \frac{5}{3}(1-q)$

$u_1 + u_1q + u_1q^2 = \frac{39}{25} \Leftrightarrow u_1\left(1+q+q^2\right) = \frac{39}{25} \Leftrightarrow \frac{5}{3}(1-q)\left(1+q+q^2\right) = \frac{39}{25}$

$\Leftrightarrow 1-q^3 = \frac{117}{125} \Leftrightarrow q^3 = \frac{8}{125} \Leftrightarrow q = \frac{2}{5}$

Do đó $u_1 = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{2}{5}\right) = 1$.

Bài 20. Bông tuyết Vôn Kốc.

Ta bắt đầu từ một tam giác đều ABC cạnh a. Chia mỗi cạnh của tam giác ABC thành ba đoạn thẳng bằng nhau. Trên mỗi đoạn thẳng ở giữa, dựng một tam giác đều nằm ngoài tam giác ABC rồi xoá đáy của nó, ta được đường gấp khúc khép kín H_1. Chia mỗi cạnh của H_1 thành ba đoạn thẳng bằng nhau, trên mỗi đoạn thẳng ở giữa, dựng một tam giác đều nằm ngoài H_1 rồi xoá đáy của nó, ta được đường gấp khúc khép kín H_2... Tiếp tục như vậy, ta được một hình giống như bông tuyết, gọi là bông tuyết Vôn Kốc.

a) Gọi $P_1, P_2, ..., P_n$ ... là độ dài của $H_1, H_2, ..., H_n$...Chứng minh rằng (P_n) là một cấp số nhân. Tìm $\lim P_n$.

b) Gọi S_n là diện tích của miền giới hạn bởi đường gấp khúc H_n. Tính S_n và tìm giới hạn của dãy số (S_n).

Hướng dẫn giải

a) Số cạnh của H_n là $3.\ 4^n$

Độ dài mỗi cạnh của H_n là $\frac{a}{3^n}$

Vậy $P_n = 3.4^n.\frac{a}{3^n} = 3a\left(\frac{4}{3}\right)^n$

$+\ P_{n+1} = P_n.\frac{4}{3} \Rightarrow (P_n)$ là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{4}{3}$

$+\ \lim P_n = \lim 3a\left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$.

b) Ta có

$$S_1 = \frac{4}{3}S = S + \frac{S}{3}$$

$$S_2 = S + \frac{1}{3}S + 3.4.\frac{1}{9}.\frac{1}{9}S = S_1 + \frac{1}{3}S.\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{3}S\left(\frac{4}{9}\right)^2$$

....

$$S_n = \left(\frac{4}{3}\right)S + \frac{S}{3}.\frac{4}{9} + \frac{S}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^2 + ... + \frac{S}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

$$S_n = S + \frac{1}{3}S\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + ... + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) = S + \frac{1}{3}S\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1}{\frac{4}{9} - 1}$$

$$\lim S_n = \frac{8}{5}S = \frac{8}{5}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{4}.$$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. $\lim \dfrac{n^2 + 2\sqrt{n} + 3}{2n^2 + n - \sqrt{n}}$ là:

(A) 0 ; (B) $\frac{1}{2}$; (C) $\frac{3}{2}$; (D) $-\frac{1}{2}$.

Câu 2. $\lim \sqrt[3]{1 + 4n^3 - 5n^6}$ là:

(A) $-\infty$; (B) 1 ; (C) $+\infty$; (D) -5.

Câu 3. $\lim n\left(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n\right)$ là:

(A) $+\infty$; (B) $-\infty$; (C) $-\frac{1}{3}$; (D) $\frac{1}{3}$.

Câu 4. $\lim\left(-3n^4 + \sin n\right)$ là:

(A) -3 ; (B) $+\infty$; (C) $-\infty$; (D) -4.

Câu 5. $\lim \dfrac{n + \sqrt[5]{n^5 + 1}}{n.4^n}$ là:

(A) 0 ; (B) $+\infty$; (C) $-\infty$; (D) 2.

IV. ĐÁP ÁN

Câu hỏi	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(A)	(D)	(C)	(A)

B. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ. HÀM SỐ LIÊN TỤC

§4. ĐỊNH NGHĨA VÀ MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm.

Định nghĩa 1: Giả sử (a ; b) là một khoảng chứa điểm x_0 và f(x) là một hàm xác định trên (a ; b) $\setminus\{x_0\}$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần tới x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập (a ; b) $\setminus\{x_0\}$ tức là $x_n \in (a;b)$, $x_n \neq x_0 \forall n$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có: $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_n) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Chú ý: $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$; $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

+ Giới hạn vô cực: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall (x_n) \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta có $\lim f(x_n) = +\infty$

2 Giới hạn của hàm số tại vô cực.

Định nghĩa 2: Giả sử hàm số f(x) xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần tới $+\infty$ nếu mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a; +\infty)$ (tức $x_n > a \quad \forall n$) mà $\lim x_n = +\infty$, ta đều có: $\lim f(x_n) = L$.

Ta viết: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

Chú ý: với mọi số nguyên dương k, ta có:

$$\lim_{x \to +\infty} x^k = +\infty \ ; \ \lim_{x \to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu k chẵn} \\ -\infty & \text{nếu k lẻ} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \ ; \ \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \ .$$

3. Một số định lý về giới hạn hữu hạn.

Chú ý: $\lim\limits_{x \to x_0} ax^k = ax_0^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$, a là hằng số)

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 21. Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}}$.

Giải

a) Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$. TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq -1 \quad \forall n$ và $\lim x_n = -1$, ta có

$f(x_n) = \dfrac{x_n^2 - 3x_n - 4}{x_n + 1} = x_n - 4 \quad \forall n$. Do đó $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x_n - 4) = -5$

Vậy $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} = -5$.

b) Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}}$ với $x < 5$.

Mọi dãy số (x_n) mà $x_n < 5 \quad \forall n$ và $\lim x_n = 1$, ta có $f(x_n) = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x_n}} \quad \forall n$.

Do đó $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{1}{\sqrt{5 - x_n}} = \dfrac{1}{\sqrt{5 - \lim x_n}} = \dfrac{1}{\sqrt{5 - 1}} = \dfrac{1}{2}$.

Bài 22. Cho hàm số $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ và hai dãy số (x'_n), (x''_n) với $x'_n = \dfrac{1}{2n\pi}$,

$x''_n = \dfrac{1}{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}$.

a) Tìm giới hạn của các dãy số $(x'_n), (x''_n)$, $(f(x'_n))$ và $(f(x''_n))$.

b) Tồn tại hay không $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim x'_n = \lim\dfrac{1}{2\pi n} = 0$; $\lim x''_n = \lim\dfrac{1}{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}} = 0$;

$\lim f(x'_n) = \lim(\cos 2\pi n) = 1$; $\lim f(x''_n) = \lim\cos\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

b) Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ vì cả hai dãy số $x'_n = \dfrac{1}{2\pi n}$; $x''_n = \dfrac{1}{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}$

cùng có giới hạn là 0 nhưng $\lim f(x'_n) \neq \lim f(x''_n)$.

Bài 23. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 + 7x + 11)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x - x^3}{(2x-1)(x^4-3)}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2}$;

e) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}|x^2 - 4|$; f) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^4 + 3x - 1}{2x^2 - 1}}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 + 7x + 11) = 3.2^2 + 7.2 + 11 = 37.$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x - x^3}{(2x-1)(x^4-3)} = \dfrac{1 - 1^3}{(2.1-1)(1^4-3)} = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}(x - 1) = 0 - 1 = -1$.

d) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2} = \lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(9x - x^2)(\sqrt{x} + 3)} = \lim\dfrac{x - 9}{x(9 - x)(\sqrt{x} + 3)} = -\dfrac{1}{54}$.

e) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}|x^2 - 4| = \left|\left(\sqrt{3}\right)^2 - 4\right| = 1$.

f) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^4+3x-1}{2x^2-1}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+3x-1}{2x^2-1}}=\sqrt{3}$

Bài 24. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x+7}{2x^3-1}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4+7x^3-15}{x^4+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x+7}{2x^3-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{0}{2}=0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4+7x^3-15}{x^4+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\dfrac{7}{x}-\dfrac{15}{x^4}}{1+\dfrac{1}{x^4}}=\dfrac{2}{1}=2$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^6}}}{3-\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{1}{3}$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^6}}}{3-\dfrac{1}{x^3}}=-\dfrac{1}{3}$.

Bài 25. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+2x}{8x^2-x+3}}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+2x}{8x^2-x+3}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{8-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}=\dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x}}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=0$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-4x+3}{x+1}$ là:

(A) 4 ; (B) −4 ; (C) 0 ; (D) ∞ .

Câu 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^8+4}}{3x^2-6x+1}$ là:

(A) $-\dfrac{1}{3}$; (B) $\dfrac{1}{3}$; (C) $\dfrac{4}{3}$; (D) $-\infty$.

Câu 3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(2x^2+6)(5x^6+4x-5)}{x^8-x^7+1}$ là:

(A) 0 ; (B) $-\infty$; (C) $+\infty$; (D) 10.

Câu 4. $\lim\limits_{x \to 1} \left|\dfrac{x^3+4x-7}{2x}\right|$ là:

(A) 1 ; (B) -1 ; (C) $\dfrac{1}{2}$; (D) $-\dfrac{7}{2}$.

Câu 5. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+4x-7}{2x}$ là:

(A) 0 ; (B) $\dfrac{1}{4}$; (C) $\dfrac{1}{48}$; (D) $\sqrt{6}$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(A)	(C)	(A)	(D)

§5. GIỚI HẠN MỘT BÊN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giới hạn hữu hạn

Định nghĩa 1: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0; b)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên phải là số thực L khi x dần tới x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(x_0; b)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$

Khi đó, ta viết: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^+$.

Định nghĩa 2: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a; x_0)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên trái là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ trong khoảng $(a; x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$. Ta đều có: $\lim f(x_n) = L$.

Ta viết $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$

Chú ý: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ và

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

2. Giới hạn vô cực

– Một số giới hạn: $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 26. Áp dụng định nghĩa giới hạn bên phải và giới hạn bên trái của hàm số, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x - 1}$; b) $\lim\limits_{x \to 5^-} \left(\sqrt{5 - x} + 2x\right)$;

c) $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1}{x - 3}$; d) $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{1}{x - 3}$.

Giải

a) Đặt $f(x) = \sqrt{x - 1}$ xác định trên $[1; +\infty)$

– Mọi dãy số (x_n) trên $[1; +\infty)$ mà $\lim x_n = 1$, ta có

$\lim f(x_n) = \lim \sqrt{x_n - 1} = \sqrt{\lim x_n - 1} = \sqrt{1 - 1} = 0$

Do đó $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x - 1} = 0$.

b) Tương tự, Đặt $f(x) = \sqrt{5 - x} + 2x$ xác định trên $(-\infty; 5]$. Với mọi dãy số (x_n) trên $(-\infty; 5]$ mà $\lim x_n = 5$, ta có:

$\lim f(x_n) = \lim\left(\sqrt{5 - x_n} + 2x_n\right) = \sqrt{5 - 5} + 2.5 = 10$

Do đó $\lim\limits_{x \to 5^-} \left(\sqrt{5 - x} + 2x\right) = 10$.

c) Đặt: $f(x) = \frac{1}{x - 3}$ xác định trên $(3; +\infty)$.

– Mọi dãy số (x_n) trong $(3; +\infty)$ mà $\lim x_n = 3$, ta có:

$\lim f(x_n) = \lim \frac{1}{x_n - 3} = +\infty$ (vì $\lim(x_n - 3) = \lim x_n - 3 = 3 - 3 = 0$ và $x_n - 3 > 0$). Vậy $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1}{x - 3} = +\infty$.

d) Đặt $f(x) = \frac{1}{x - 3}$ xác định trên $(-\infty; 3)$.

Tương tự câu c, ta có $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{1}{x - 3} = -\infty$.

Bài 27. Tìm các giới hạn sau (nếu có):

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|}{x-2}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x-2}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}1=1$ (do $x>2$ nên $|x-2|=x-2$).

b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}(-1)=-1$ (do $x<2$ nên $|x-2|=-(x-2)$)

c) Do $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|}{x-2}$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x-2}$.

Bài 28. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2-x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}}$; d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{2}{-1}=-2$.

b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(2-x)(2+x)}{\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{2-x}\,(2+x)}{1}=\dfrac{0}{1}=0$.

c) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{x^4(x+1)}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+1}\,(x+2)}{x^2}=\dfrac{0}{1}=0$.

d). $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{(3-x)(4-x)}}{\sqrt{(3-x)(3+x)}}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}=\dfrac{\sqrt{4-3}}{\sqrt{3+3}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Bài 29. Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}2|x|-1 & \text{với } x\le -2\\ \sqrt{2x^2+1} & \text{với } x>-2\end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$ (nếu có) .

Hướng dẫn giải

- Với $x>-2$, $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$. Do đó $\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\sqrt{2x^2+1}=3$.
- Với $x\le -2$, $f(x)=2|x|-1$. Do đó $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}(2|x|-1)=3$.

Do đó $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=3$.

LUYỆN TẬP

Bài 30. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-8\right|$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x}$;

c) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-3}}$; d) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{\dfrac{2x(x+1)}{x^2-6}}$;

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{1-x^3}-3x}{2x^2+x-3}$; f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2|x+1|-5\sqrt{x^2-3}}{2x+3}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-8\right|=\left|\left(\sqrt{3}\right)^2-8\right|=5$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x}=\dfrac{2^2+2+1}{2^2+2.2}=\dfrac{7}{8}$.

c) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-3}}=\sqrt{\dfrac{(-1)^3}{(-1)^2-3}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

d) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{\dfrac{2x(x+1)}{x^2-6}}=\sqrt[3]{\dfrac{2.3(3+1)}{3^2-6}}=\sqrt[3]{8}=2$.

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{1-x^3}-3x}{2x^2+x-3}=\dfrac{\sqrt{1-(-2)^3}-3(-2)}{2(-2)^2-2-3}=\dfrac{9}{3}=3$.

f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2|x+1|-5\sqrt{x^2-3}}{2x+3}=\dfrac{2|-2+1|-5\sqrt{(-2)^2-3}}{2(-2)+3}=3$.

Bài 31. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\dfrac{x^3+2\sqrt{2}}{x^2-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-27x}{2x^2-3x-9}$;

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x^2+6x+8}$; d) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}+x-1}{\sqrt{x^2-x^3}}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\dfrac{x^3+2\sqrt{2}}{x^2-2}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\dfrac{x^3+\left(\sqrt{2}\right)^3}{x^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\dfrac{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+2\right)}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\dfrac{x^2-\sqrt{2}x+2}{x-\sqrt{2}}=\dfrac{\left(-\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}\right)+2}{-\sqrt{2}-\sqrt{2}}=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-27x}{2x^2-3x-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\left(x^3-27\right)}{2x^2-3x-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{(x-3)(2x+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\left(x^2+3x+9\right)}{2x+3}=\dfrac{3\left(3^2+3.3+9\right)}{2.3+3}=9.$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x^2+6x+8}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}{(x+2)(x+4)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)\left(x^2+4\right)}{x+4}$

$=\dfrac{(-2-2)\left((-2)^2+4\right)}{-2+4}=-16.$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}+x-1}{\sqrt{x^2-x^3}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{(1-x)^2}}{\sqrt{x^2(1-x)}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}\left(1-\sqrt{1-x}\right)}{|x|\sqrt{1-x}}.$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{|x|}=\dfrac{1-\sqrt{1-1}}{|1|}=1.$

Bài 32 Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{2x^5+x^3-1}{\left(2x^2-1\right)\left(x^3+x\right)}}$;　　b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+3}$;　　d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4+x^2+1}}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{2x^5+x^3-1}{\left(2x^2-1\right)\left(x^3+x\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^5}}{\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{2}}=1.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\left(2+\dfrac{3}{|x|}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\left(2+\dfrac{3}{|x|}\right)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{|x|}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}=2.$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+2}{2+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{-1+2}{2}=\dfrac{1}{2}.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4+x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}=0$.

Bài 33. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{với } x\le 2\\ 4x-3 & \text{với } x>2\end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to2}f$ (nếu có)

Hướng dẫn giải

+ $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(x^2-2x+3\right)=3$.

+ $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(4x-3)=5$.

+ Do $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)\ne\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x^4-1}}$ là:

(A) $\dfrac{3}{4}$; (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (D) 0.

Câu 2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+3x+1}-4x}{-4x+7}$ là:

(A) $-\dfrac{3}{4}$; (B) $\dfrac{3}{4}$; (C) $-\infty$; (D) $-\dfrac{1}{4}$.

Câu 3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3|x|+7}{\sqrt[4]{x^4-6}}$ là:

(A) –3 ; (B) 3 ; (C) $+\infty$; (D) 0.

Câu 4 $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}+3(x+2)}{-\sqrt{x^3+2x^2}}$ là:

(A) 3 ; (B) $\dfrac{3}{2}$; (C) 0 ; (D) $-\dfrac{3}{2}$.

Câu 5. Cho $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{nếu } x>1\\ x^2+x+1 & \text{nếu } x\le 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ là:

(A) Không tồn tại ; (B) 0 ; (C) 3 ; (D) –1.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(B)	(A)	(D)	(C)

§6. MỘT SỐ QUI TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

2. Qui tắc 1: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x).g(x)\right]$ xác định

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	Dấu của L	$\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x).g(x)\right]$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	−	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	−	$+\infty$

3. Qui tắc 2

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ và g(x) > 0 hoặc g(x) < 0 $\forall x \in J \setminus \{x_0\}$ (J là một khoảng nào đó chứa x_0) thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ xác định:

Dấu của L	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
+	+	$+\infty$
+	−	$-\infty$
−	+	$-\infty$
−	−	$+\infty$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 34. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x^3 - 5x^2 + 7\right)$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x^3 - 5x^2 + 7\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \left(3 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{7}{x^2}\right) = -\infty$ vì $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

và $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{7}{x^2}\right) = 3 > 0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^4-3x+12}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^4\left(2-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{12}{x^4}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sqrt{2-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{12}{x^4}}=+\infty$,

vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{12}{x^4}}=\sqrt{2}>0$

Bài 35. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x+1}{x-2}=+\infty$; b) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x+1}{x-2}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x+1}{x-2}=+\infty$ vì $\lim\limits_{x\to2^+}(2x+1)=5>0$, $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0$ và $x-2>0$

b) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x+1}{x-2}=-\infty$ vì $\lim\limits_{x\to2^-}(2x+1)=5>0$, $\lim\limits_{x\to2^-}(x-2)=0$ và $x-2<0$.

c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)=-\infty$ vì $\lim\limits_{x\to0}(x-1)=-1<0$, $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ và $x^2>0\ \forall x\neq0$

d) $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x+1}{x^2-4}=-\infty$ vì $\lim\limits_{x\to2^-}(x+1)=3>0$,

$\lim\limits_{x\to2^-}\left(x^2-4\right)=0$ và $x^2-4<0$.

Bài 36 . Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-5}{x^2+1}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-5}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=+\infty$

vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{5}{x^3}\right)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)=0$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)>0\ \forall x>0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^3}}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}}=+\infty$

vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^3}}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\right)=0$ và $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-2\right)>0\ \forall x<0$

Bài 37. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{2}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{2x+1}{2x-3}\right]$; b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)}$.

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{(x-1)^2}=+\infty$ vì $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0$ và $(x-1)^2>0\ \forall x\neq1$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+1}{2x-3}=-3$. Vậy $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{2}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{2x+1}{2x-3}\right]=-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5}{(x-1)^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{5}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{1}{x-2}\right]$

Ta có $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5}{(x-1)^2}=+\infty$ vì $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0$ và $(x-1)^2>0\ \forall x\neq1$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-2}=-1$. Vậy $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)}=-\infty$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{3x^4+5x-1}$ là:

(A) $-\infty$; (B) $+\infty$; (C) 0 ; (D) $\dfrac{1}{3}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{-x^3+5x+1}$ là:

(A) $-\infty$; (B) 0 ; (C) $+\infty$; (D) -1.

3. $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{3x^2+x-1}{x+1}$ là:

(A) 3 ; (B) 0 ; (C) $-\infty$; (D) $+\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1}{(x-2)(x^2-4)}$ là:

(A) 3 ; (B) $+\infty$; (C) 1 ; (D) $-\infty$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}\right)$ là:

(A) 1 ; (B) $+\infty$; (C) 0 ; (D) $-\infty$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(A)	(C)	(B)	(D)

§7. CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Dạng vô định: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$.
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{A(x)}{B(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}$ ta viết

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)C(x)}{(x - x_0)D(x)} = \lim \frac{C(x)}{D(x)}$$
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{A(x)}{B(x)}$ có dạng $\frac{\infty}{\infty}$ ta thường chia cả tử số và mẫu số cho lũy thừa với số mũ cao nhất.
- Đối với dạng $0.\infty$ và $\infty - \infty$ thường được đưa về một trong hai dạng trên để tìm giới hạn

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 38. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$; b) $\lim\limits_{x \to (-3)^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2}$;

c) $\lim\limits_{x \to (-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2}$; d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2 + x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = 3$

b) $\lim\limits_{x \to (-3)^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2} = \lim\limits_{x \to (-3)^+} \frac{(2x - 1)(x + 3)}{(x + 3)^2} = \lim\limits_{x \to (-3)^+} \frac{2x - 1}{x + 3} = -\infty$

(vì $\lim\limits_{x \to (-3)^+} (2x - 1) = -7$, $\lim\limits_{x \to (-3)^+} (x + 3) = 0$ và $x + 3 > 0$)

c) Tương tự $\lim\limits_{x \to (-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x^3 + 1} - 1\right)\left(\sqrt{x^3 + 1} + 1\right)}{(x^2 + x)\left(\sqrt{x^3 + 1} + 1\right)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{(x^2 + x)\left(\sqrt{x^3 + 1} + 1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1} + 1} = 0$$

Bài 39. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + x - 10}{9 - 3x^3}$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17}$.

Giải

a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + x - 10}{9 - 3x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{10}{x^3}}{\dfrac{9}{x^3} - 3} = \frac{0}{-3} = 0.$$

b) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2 - \dfrac{7}{x} + \dfrac{12}{x^2}\right)}}{3|x| - 17} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{2 - \dfrac{7}{x} + \dfrac{12}{x^2}}}{3|x| - 17}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{2 - \dfrac{7}{x} + \dfrac{12}{x^2}}}{-3x - 17} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2 - \dfrac{7}{x} + \dfrac{12}{x^2}}}{3 + \dfrac{17}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Bài 40. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \left(x^3 + 1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 1}}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 2)\sqrt{\dfrac{x - 1}{x^3 + x}}$.

Giải

a) Dạng $0.\infty$ $\forall x > -1$ ta có:

$$\lim_{x \to (-1)^+} \left(x^3 + 1\right)\sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} = \lim_{x \to (-1)^+} \left[(x + 1)\left(x^2 - x + 1\right)\sqrt{\frac{x}{(x - 1)(x + 1)}}\right]$$

$$= \lim_{x \to (-1)^+} \left[\left(x^2 - x + 1\right).\sqrt{x + 1}\sqrt{\frac{x}{x - 1}}\right] = (1 + 1 + 1).0.\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} (x + 2)\sqrt{\frac{x - 1}{x^3 + x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)\sqrt{\frac{1 - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}}} = 1.$$

Bài 41. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x - x^2} - 1}{x^2 - x}$.

Giải

a) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

b) $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x - x^2} - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{2x - x^2} - 1\right)\left(\sqrt{2x - x^2} + 1\right)}{\left(x^2 - x\right)\left(\sqrt{2x - x^2} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)^2}{x(x-1)\left(\sqrt{2x-x^2}+1\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)}{x\left(\sqrt{2x-x^2}+1\right)} = 0.$$

LUYỆN TẬP

Bài 42. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$; b) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$;

c) $\lim\limits_{x \to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$; d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$;

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^4-x^3+11}{2x-7}$; f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^4+4}}{x+4}$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x+1}{x^2}\right) = +\infty$ vì $\lim\limits_{x \to 0}(x+1) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ và $x^2 > 0$ $\forall x \neq 0$.

b) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \lim\limits_{x \to -2}\left(x^2-2x+4\right) = 12$.

c) $\lim\limits_{x \to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x} = \lim\limits_{x \to 9} \frac{(9-x)}{(9-x)\left(3+\sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{x \to 9} \frac{1}{3+\sqrt{x}} = \frac{1}{6}$.

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{4-(4-x)}{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2+\sqrt{4-x}} = \frac{1}{4}$.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^4-x^3+11}{2x-7} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}+\frac{11}{x^4}}{\frac{2}{x^3}-\frac{7}{x^4}} = +\infty$.

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^4+4}}{x+4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2\sqrt{1+\frac{4}{x^4}}}{x+4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^4}}}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}} = -\infty$.

Bài 43. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}} \frac{x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2}$; b) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-4x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-x}$; d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{3x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}}\dfrac{x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}}\dfrac{\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+3\right)}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}}\dfrac{x^2-\sqrt{3}x+3}{\sqrt{3}-x}$

$$=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}\right)+3}{\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)}=\frac{9}{2\sqrt{3}}.$$

b) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-4x}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1}{x\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{1}{16}.$

c) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\left(\sqrt{x-1}\right)^2}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x\left(\sqrt{x-1}\right)}=+\infty$

(vì $\lim\limits_{x\to1^+}x\sqrt{x-1}=0$ và $x\sqrt{x-1}>0\ \forall x>1$)

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{3x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+x}{3x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{3\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\dfrac{1}{6}.$

Bài 44. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{\dfrac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|+\sqrt{x^2+x}}{x+10}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+x^2-1}}{1-2x}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+x\right).$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{\dfrac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\dfrac{2x^5+x^3}{x^5-x^2+3}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\dfrac{2+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^5}}}\right)=-\sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|+\sqrt{x^2+x}}{x+10}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|+\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}}{x+10}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)}{x+10}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)}{x+10}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)}{1+\dfrac{10}{x}}=\dfrac{-2}{1}=-2.$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^4 + x^2 - 1}}{1 - 2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}}}{1 - 2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}}}{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}} = -\infty$

(vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}} = \sqrt{2} > 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\right) = 0$ và $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} < 0 \ \forall x > 0$).

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 1} + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{2x^2 + 1} + x\right)\left(\sqrt{2x^2 + 1} - x\right)}{\sqrt{2x^2 + 1} - x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{2x^2 + 1} - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}} - \dfrac{1}{x}} = +\infty.$

(Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1 > 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}} - \dfrac{1}{x} = 0$ và $\sqrt{\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}} - \dfrac{1}{x} > 0$ $\forall x > 0$)

Bài 45. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x.\sqrt{1 - x}}{2\sqrt{1 - x} + 1 - x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3 - x}{\sqrt{27 - x^3}}$; d) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^3 - 8}}{x^2 - 2x}$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x}\right)} = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x.\sqrt{1 - x}}{2\sqrt{1 - x} + 1 - x} = \lim\limits_{x \to 1^-} x \dfrac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x}\left(2 + \sqrt{1 - x}\right)} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{2 + \sqrt{1 - x}} = \dfrac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3 - x}{\sqrt{27 - x^3}} = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{\left(\sqrt{3 - x}\right)^2}{\sqrt{3 - x}.\sqrt{9 + 3x + x^2}} = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{\sqrt{3 - x}}{\sqrt{9 + 3x + x^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{27}} = 0$.

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^3 - 8}}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{(x - 2)\left(x^2 + 2x + 4\right)}}{x(x - 2)} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x\sqrt{(x - 2)}} = +\infty$

(vì $\lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{x^2 + 2x + 4} = 2\sqrt{3} > 0$, $\lim\limits_{x \to 2^+} x\sqrt{x - 2} = 0$ và $x\sqrt{x - 2} > 0$, $\forall x > 2$)

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^6 - 5x^5 + x}{(1 - x)^2}$ là:

(A) 0 ; (B) 10 ; (C) –10 ; (D) 4

Câu 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}$ là:

(A) $\dfrac{1}{6}$; (B) $-\dfrac{1}{6}$; (C) 0 ; (D) $\dfrac{1}{2}$.

Câu 3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+1}$ là:

(A) 4 ; (B) $\dfrac{2}{3}$; (C) -4 ; (D) $-\dfrac{2}{3}$.

Câu 4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)$ là:

(A) $+\infty$; (B) $-\infty$; (C) 0 ; (D) 1.

Câu 5. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^4-1}}{x^3-1}$ là:

(A) $-\infty$; (B) $+\infty$; (C) 0 ; (D) 2

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(A)	(D)	(C)	(B).

§8. HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số liên tục tại một điểm

- Định nghĩa: Giả sử hàm số f xác định trên (a ; b) và $x_0 \in (a;b)$. Hàm số f được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số không liên tục tại điểm x_0 được gọi là gián đoạn tại x_0.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn.

- Hàm số f liên tục trên (a ; b) nếu nó liên tục tại một điểm thuộc khoảng đó.
- Hàm số f xác định trên $[a;b]$ được gọi là liên tục trên $[a;b]$ nếu:
  - Nó liên tục trên (a ; b)

  và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.
- Các hàm số đa thức, hàm phân thức hữu tỷ, hàm số lượng giác (y=sinx, y = cosx, y = tanx, y = cotx) liên tục trên tập xác định của nó.

- Giả sử hàm số f liên tục trên $[a;b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa f(a) và f(b), tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho f(c) = M.
- Nếu hàm số f liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho f(c) = 0.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 46. Chứng minh rằng:

a) Các hàm số $f(x) = x^3 - x + 3$ và $g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{với } x \neq 2 \\ 1 & \text{với } x = 2 \end{cases}$

liên tục tại điểm x = 2.

c) Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{với } x \neq 1 \\ 2 & \text{với } x = 1 \end{cases}$ gián đoạn tại điểm x = 1

Giải

a) $f(x) = x^3 - x + 3$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Vậy hai hàm số trên liên tục tại $\forall x \in \mathbb{R}$ (vì cả hai hàm số là các hàm số đa thức và phân thức hữu tỉ).

b) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x - 1) = 1$
- $f(2) = 1$

Do $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ nên hàm số liên tục tại x = 2.

c) Ta có: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = 3$
- $f(1) = 2$.

Do $2 \neq 3$ nên hàm số trên gián đoạn tại x = 1

Bài 47. Chứng minh rằng:

a) **Hàm số** $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

b) **Hàm số** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ liên tục trên $(-1;1)$

c) **Hàm số** $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ liên tục trên $[-2;2]$

d) **Hàm số** $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$

Giải

a) **Xét** $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ có tập xác định là: $\mathbb{R}$

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ xác định trên $(-1;1)$

$\forall x_0 \in (-1;1)$ **ta có:** $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}} = f(x_0)$

Do đó hàm số f liên tục trên $(-1;1)$.

c) $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ xác định trên $[-2;2]$

- **Ta có:** $\forall x_0 \in (-2;2)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{8 - 2x^2} = \sqrt{8 - 2x_0^2} = f(x_0)$

=> **f(x) liên tục trên** $(-2\ ;\ 2)$.

- **Mặt khác:** $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^+} \sqrt{8 - 2x^2} = 0 = f(-2)$

Và $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{8 - 2x^2} = 0 = f(2)$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $[-2;2]$.

d) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ xác định trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$

- **Ta có:** $\forall x_0 \in \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{2x - 1} = \sqrt{2x_0 - 1} = f(x_0)$

=> **f(x) liên tục trên** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

- **Mặt khác** $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \sqrt{2x - 1} = 0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Bài 48. **Chứng** minh rằng mỗi hàm số sau đây **liên tục trên tập xác định của nó:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{2x + 1}$; b) $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{2 - x}$.

Giải

a) Hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{2x + 1}$ là hàm phân thức hữu tỷ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

=> Hàm số đó liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

b) $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{2 - x}$ có TXD $D = (-\infty; 1]$

Ta có: $\forall x_0 \in (-\infty; 1)$,

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0}\left(\sqrt{1 - x} + \sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{1 - x_0} + \sqrt{2 - x_0} = f(x_0)$.

Mặt khác $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-}\left(\sqrt{1 - x} + \sqrt{2 - x}\right) = 1 = f(1)$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $D = (-\infty; 1]$.

Bài 49. Chứng minh rằng phương trình

$x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ (*)

Có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = x^2 \cos x + x \sin x + 1$. f(x) xác định trên $\mathbb{R}$

=> f(x) liên tục trên $[0; \pi]$. Lại có f(0) = 1, $f(\pi) = -\pi^2 + 1$.

Vì $f(0) . f(\pi) < 0$, nên tồn tại một điểm $c \in (0; \pi)$ sao cho f(c) = 0.

Hay phương trình (*) có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.

LUYỆN TẬP

Bài 50. Chứng minh rằng :

a) Hàm số $f(x) = \begin{cases} (x + 1)^2 & \text{với } x \le 0 \\ x^2 + 2 & \text{với } x > 0 \end{cases}$ gián đoạn tại điểm x = 0

b) Mỗi hàm số $g(x) = \sqrt{x - 3}$ và $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 2} & \text{với } x \le 1 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{với } x > 1 \end{cases}$

liên tục trên tập xác định của nó.

Giải

a) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{với } x \leq 0 \\ x^2 + 2 & \text{với } x > 0 \end{cases}$

. Hàm số f(x) xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+1)^2 = 1$.

+ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 2) = 2$

+ $f(0) = (0+1)^2 = 1$

Do $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ nên hàm số đã cho gián đoạn tại **x = 0**

b) Xét $g(x) = \sqrt{x-3}$

. Hàm số g(x) xác định trên $[3; +\infty)$

Ta có: $\forall x_0 \in (3; +\infty)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \sqrt{x_0 - 3} = g(x_0)$

Mặt khác $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 0 = g(3)$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $[3; +\infty)$

* Xét $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{với } x \leq 1 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{với } x > 1 \end{cases}$

+ Hàm số h(x) xác định trên $\mathbb{R}$

+ Với $x < 1$: $h(x) = \dfrac{1}{x-2}$ liên tục trên $(-\infty; 1)$

Với $x > 1$: $h(x) = -\dfrac{1}{x}$ liên tục trên $(1; +\infty)$

+ Ta xét tại x = 1:

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{1} = -1$$

Và $h(1) = \dfrac{1}{1-2} = -1$.

Vì $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = h(1)$ nên h(x) liên tục tại x = 1

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$

Bài 51. Giải thích vì sao:

a) Hàm số $f(x) = x^2 \sin x - 2\cos^2 x + 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $g(x) = \dfrac{x^3 + x\cos x + \sin x}{2\sin x + 3}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

c) Hàm số $h(x)=\dfrac{(2x+1)\sin x-\cos^3 x}{x\sin x}$ liên tục tại mọi điểm $k \neq k\pi$, $x \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

a) $f(x)=x^2\sin x-2\cos^2 x+3$ có TXD: $D=\mathbb{R}$

=> f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) $g(x)=\dfrac{x^3+x\cos x+\sin x}{2\sin x+3}$ có TXD: $D=\mathbb{R}$

(vì $-1 \le \sin x \le 1$ nên $1 \le 2\sin x+3 \le 5$ hay $\sin x+3 \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

=> g(x) liên tục trên $\mathbb{R}$

c) $h(x)=\dfrac{(2x+1)\sin x-\cos^3 x}{x\sin x}$

Điều kiện: $x\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Do đó h(x) liên tục tại mọi điểm $x \neq k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 52. Chứng minh rằng, hàm số $f(x)=x^2+x+3+\dfrac{1}{x-2}$ liên tục trên tập xác định của nó.

Hướng dẫn giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

=> f(x) liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Bài 53. Chứng minh rằng, phương trình $x^3+x+1=0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1

Giải

Đặt $f(x)=x^3+x+1$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$

– Do f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ nên cũng liên tục trên $[-1;0]$

– Mặt khác : $f(-1)=-1$ và $f(0)=1$ nên $f(-1).f(0)=-1<0$.

Ta suy ra: $\exists c \in (-1;0)$ sao cho f(c) = 0 . Hay phương trình $x^3+x+1=0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1.

Bài 54. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{với } x \neq 0 \\ -1 & \text{với } x=0 \end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng $f(-1).f(2)<0$

b) Chứng tỏ rằng phương trình f(x) = 0 không có nghiệm thuộc khoảng (–1; 2).

c) Điều khẳng định trong câu b) có mâu thuẫn với định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục hay không?

Hướng dẫn giải

a) $f(-1)=\frac{1}{-1}=-1$; $f(2)=\frac{1}{2}$ .Từ đây ta suy ra : $f(-1).f(2)<0$

b) Tập xác định của hàm số là tập $\mathbb{R}$

từ công thức xác định hàm số, ta có: $f(x)=\frac{1}{x}$ với $x \neq 0$ ta suy ra

$f(x) \neq 0$ với $\forall x \neq 0$ (1)

$f(x)=-1 \neq 0$ với $x=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $f(x)=0$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$. Do đó $f(x)=0$ vô nghiệm trên $[-1;2]$.

c) Điều khẳng định trong câu b) không mâu thuẫn với định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục .

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số $f(x)=\frac{x^3+3x+\sin x}{\cos 2x+1}$ liên tục trên :

(A) $\mathbb{R}$; (B) $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$; (C) $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi\right\}$; (D) $\mathbb{R}\setminus\{\pi+k2\pi\}$.

Câu 2. Hàm số $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{4-x^2}}$ liên tục trên :

(A) $[-2;2]$; (B) $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$; (C) $(-2;2)$; (D) $\mathbb{R}\setminus(-2;2)$.

Câu 3 . Hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-1}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1\\ 2x-1 & \text{nếu } x=1\end{cases}$ liên tục trên :

(A) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; (B) $\mathbb{R}\setminus(-\infty;1)$; (C) $(-\infty;1)$; (D) $(1;+\infty)$.

Câu 4. Điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{2x-2}{x^2-3x+2} & \text{với } x \neq 1\\ -2 & \text{với } x=1\end{cases}$ là:

(A) $x=1$; (B) $x=0$; (C) $x=3$; (D) $x=2$.

Câu 5. Hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{với } x \neq 2\\ a & \text{với } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$ khi:

(A) $a=1$; (B) $a=-1$; (C) $a=0$; (D) $a=7$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu hỏi	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(C)	(A)	(D)	(A)

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Bài 55. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với :

a) $u_n = \dfrac{2n^3 - n - 3}{5n - 1}$; b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^4 - 2n + 3}}{-2n^2 + 3}$;

c) $u_n = -2n^2 + 3n - 7$; d) $u_n = \sqrt[3]{n^9 + 8n^2 - 7}$.

Giải

$$\text{a) } \lim \frac{2n^3 - n - 3}{5n - 1} = \lim \frac{2 - \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{\frac{5}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = +\infty$$

(vì $\lim\left[2 - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{3}{n^3}\right] = 2 > 0$, $\lim\left[\dfrac{5}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}\right] = 0$ và $\dfrac{5}{n^2} - \dfrac{1}{n^3} > 0$, $\forall n \in N^*$

$$\text{b) } \lim \frac{\sqrt{n^4 - 2n + 3}}{-2n^2 + 3} = \lim \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4}}}{-2 + \frac{3}{n^4}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \lim\left(-2n^2 + 3n - 7\right) = \lim n^2\left(-2 + \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}\right) = -\infty$$

(vì $\lim n^2 = +\infty$; $\lim\left(-2 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{7}{n^2}\right) = -2 < 0$)

$$\text{d) } \lim\left(\sqrt[3]{n^9 + 8n^2 - 7}\right) = \lim n^3\left(\sqrt[3]{1 + \frac{8}{n^7} - \frac{7}{n^9}}\right) = +\infty.$$

Bài 56. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với:

a) $u_n = \sqrt{3n - 1} - \sqrt{2n - 1}$; b) $u_n = \dfrac{4^n - 5^n}{2^n + 3.5^n}$.

Giải

$$\text{a) } \lim\left[\sqrt{3n - 1} - \sqrt{2n - 1}\right] = \lim \frac{(3n - 1) - (2n - 1)}{\sqrt{3n - 1} + \sqrt{2n - 1}} = \lim \frac{n}{\sqrt{3n - 1} + \sqrt{2n - 1}} = +\infty$$

$$\text{b) } \lim \frac{4^n - 5^n}{2^n + 3.5^n} = \lim \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3} = -\frac{1}{3}$$

(vì $\lim\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0$; $\lim\left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$).

Bài 57. Cho một cấp số nhân (u_n), trong đó

$243u_8 = 32u_3$ với $u_3 \neq 0$

a) Tính công bội của cấp số nhân đã cho.

b) Biết tổng của cấp số nhân đã cho bằng 3^5, tính u_1.

Giải

a) Từ giải thiết $u_3 \neq 0$ nên công bội $q \neq 0$

$$\begin{matrix} u_8 = u_1.q^7 \\ u_3 = u_1.q^2 \end{matrix} \quad \text{nên suy ra } 243u_1.q^7 = 32u_1.q^2 \Leftrightarrow q^5 = \frac{32}{243}$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{2}{3}.$$

b) $S = \dfrac{u_1}{1-q} \Leftrightarrow u_1 = 3^5\left(1 - \dfrac{2}{3}\right) = 3^4 = 81$

Bài 58. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ thì: $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

Do đó $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$

Ta suy ra: $\lim u_n = \lim \dfrac{n}{n+1} = \lim \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1$.

B. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Bài 59. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt[3]{\dfrac{2x^4 + 3x + 1}{x^2 - x + 2}}$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 5}}{2x - 1}$;

c) $\lim\limits_{x \to (-3)^-} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 4x + 3}$;

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{(x-2)^2}\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x}}$;

e) $\lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{\sqrt{8 + 2x} - 2}{\sqrt{x + 2}}$;

f) $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{4 + x^2}\right)$.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt[3]{\dfrac{2x^4 + 3x + 1}{x^2 - x + 2}} = \sqrt[3]{\dfrac{2(-2)^4 + 3(-2) + 1}{(-2)^2 - (-2) + 2}} = \sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{3}{2}$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 5}}{2x - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x^2}}}{2x - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x\sqrt{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x^2}}}{2x - 1}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}.$$

c) $\lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{x^4+1}{x^2+4x+3} = \lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{x^4+1}{(x+1)(x+3)} = +\infty$.

(vì $\lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{x^4+1}{x+1} = -41 < 0$, $\lim\limits_{x\to(-3)^-} (x+3) = 0$ và $x+3<0$ và

d). Ta có : $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3}{(x-2)^2} = +\infty$ (vì $3>0$, $\lim\limits_{x\to2}(x-2)^2 = 0$ và $(x-2)^2 > 0$

$\forall x \neq 2$). Mặt khác $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x}} = \sqrt{\dfrac{2+4}{4-2}} = \sqrt{3} > 0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3}{(x-2)^2}\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x}} = +\infty$.

e) $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{\sqrt{8+2x}-2}{\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{\left(\sqrt{8+2x}-2\right)\left(\sqrt{8+2x}+2\right)}{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{8+2x}+2\right)}$

$$= \lim_{x\to(-2)^+} \frac{2(x+2)}{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{8+2x+2}\right)} = \lim_{x\to(-2)^+} \frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{8+2x}+2} = \frac{0}{4} = 0$$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4+x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(x^2+x\right)-\left(4+x^2\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{4+x^2}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-4}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{4+x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{4}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{4}{x}+1}} = -\frac{1}{2}.$$

Bài 60. Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+8}{4x+8} & \text{với } x \neq -2 \\ 3 & \text{với } x=-2 \end{cases}$ có liên tục trên $\mathbb{R}$ hay không?

Giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ Ta có: $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}{4(x+2)} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2-2x+4}{4} = 3$

và $f(-2) = 3$

Vậy hàm số trên liên tục tại $x = -2$.

+ Với $x \neq -2$: $f(x) = \dfrac{x^3+8}{4x+8}$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Tóm lại f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 61. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} & \text{với } x < 2 \\ mx + m + 1 & \text{với } x \geq 2 \end{cases}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Giải

+ Với $x < 2$: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x}$ liên tục trên $(-\infty; 2)$.

+ Với $x > 2$: $f(x) = mx + m + 1$ liên tục trên $(2; k + \infty)$

+ Tại $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (mx + m + 1) = 2m + m + 1 = 3m + 1.$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x-1}{x} = \frac{1}{2}.$$

Và $f(2) = 3m + 1$

f(x) liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $3m + 1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{6}$.

Vậy với $m = -\dfrac{1}{6}$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 62. Chứng minh rằng phương trình

$$x^4 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$$

có ít nhất một nghiệm thuộc (1 ; 2).

Giải

Đặt $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 6$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+ Hàm số f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $[1;2]$.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} f(1) = -3 < 0 \\ f(2) = 8 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1).f(2) < 0.$

Khi đó có ít nhất 1 điểm $c \in (1;2)$ sao cho $f(c) = 0$. Hay phương trình f(x) = 0 luôn có ít nhất một nghiệm thuộc (1; 2).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi câu của các bài từ 63 đến 65, hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả đã cho.

Bài 63. a) $\lim \dfrac{n - 2\sqrt{n}\sin 2n}{2n}$ là:

(A) 1 ; (B) $\dfrac{1}{2}$; (C) -1 ; (D) 0.

b) $\lim \dfrac{n^2 - 3n^3}{2n^3 + 5n - 2}$ là:

(A) $\dfrac{1}{2}$; (B) $\dfrac{1}{5}$; (C) $-\dfrac{3}{2}$; (D) 0.

c) $\lim \dfrac{3^n - 1}{2^n - 2.3^n + 1}$ là:

(A) $-\dfrac{1}{2}$; (B) $-\dfrac{3}{2}$; (C) $\dfrac{1}{2}$; (D) -1.

d) $\lim\left(2n - 3n^3\right)$ là:

(A) $+\infty$; (B) $-\infty$; (C) 2 ; (D) -3.

Giải

a) $\lim \dfrac{n - 2\sqrt{n}\sin 2n}{2n} = \lim\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sin 2n}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{2}$ (vì $\lim \dfrac{\sin 2n}{\sqrt{n}} = 0$)

Đáp án: (B) .

b) $\lim \dfrac{n^2 - 3n^3}{2n^3 + 5n - 2} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n} - 3}{2 + \dfrac{5}{n^2} - \dfrac{2}{n^3}} = -\dfrac{3}{2}$.

Đáp án: (C).

c) $\lim \dfrac{3^n - 1}{2^n - 2.3^n + 1} = \lim \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n} = -\dfrac{1}{2}$.

Đáp án : (A).

d) $\lim\left(2n - 3n^3\right) = \lim n^3\left(\dfrac{2}{n^2} - 3\right) = -\infty$

Đáp án: (B).

Bài 64. a) $\lim \dfrac{n^3 - 3n}{1 - 3n^2}$ là:

(A) $-\dfrac{1}{3}$; (B) $\dfrac{2}{3}$; (C) $+\infty$; (D) $-\infty$

b) $\lim\left(2^n - 5^n\right)$ là:

(A) $+\infty$; (B) 1 ; (C) $-\infty$; (D) $\dfrac{5}{2}$.

c) $\lim \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$ là:

(A) $+\infty$; (B) $-\infty$; (C) 0 ; (D 1.

d) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n}$ là:

(A) $+\infty$; (B) 0 ; (C) 2 ; (D -2.

Giải

a) $\lim \frac{n^3 - 3n}{1 - 3n^2} = \lim \frac{1 - \frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^3} - \frac{3}{n}} = -\infty$.

Đáp án : (D).

b) $\lim\left(2^n - 5^n\right) = \lim 5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1\right) = -\infty$

Đáp án: (C).

c) $\lim\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$.

Đáp án : (C).

d) $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n} = \lim \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{n} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{1} = 2$.

Đáp án : (C)

Bài 65. a) $\lim \frac{1 - 2^n}{3^n + 1}$ là:

(A) $-\frac{2}{3}$; (B) 0 ; (C) 1 ; (D) $\frac{1}{2}$.

b) Tổng của cấp số nhân vô hạn $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \ldots$ là:

(A) $-\frac{1}{4}$; (B) $\frac{1}{2}$; (C) -1 ; (D) $-\frac{1}{3}$.

c) Số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,5111... được biểu diễn bởi phân số.

(A) $\frac{5}{11}$; (B) $\frac{46}{90}$; (C) $\frac{43}{90}$; (D) $\frac{47}{90}$.

Giải

a) $\lim \frac{1 - 2^n}{3^n + 1} = \lim \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 0$.

Đáp án: (B).

b) $u_1 = -\frac{1}{2}, q = -\frac{1}{2}$

Vậy $S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{3}$.

Đáp án: (D).

c) Ta có: $0,5111 = 0,5 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{10^2}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{46}{90}$.

Đáp án: (B).

Bài 66.

a) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là −1?

(A) $\lim \frac{2n + 3}{2 - 3n}$; (B) $\lim \frac{n^2 - n^3}{2n^3 + 1}$;

(C) $\lim \frac{n^2 + n}{-2n - n^2}$; (D) $\lim \frac{n^3}{n^2 + 3}$.

b) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

(A) $\lim \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + n}$; (B) $\lim \frac{n^3 + 2n - 1}{n - 2n^3}$;

(C) $\lim \frac{2n^2 - 3n}{n^3 + 3n}$; (D) $\lim \frac{n^2 - n + 1}{2n - 1}$.

c) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0?

(A) $\lim \frac{2^n + 1}{3.2^n - 3^n}$; (B) $\lim \frac{2^n + 3}{1 - 2^n}$;

(C) $\lim \frac{1 - n^3}{n^2 + 2n}$; (D) $\lim \frac{(2n + 1)(n - 3)^2}{n - 2n^3}$.

Giải

a) $\lim \frac{2n + 3}{2 - 3n} = -\frac{2}{3}$; $\lim \frac{n^2 - n^3}{2n^3 + 1} = -\frac{1}{3}$; $\lim \frac{n^2 + n}{-2n - n^2} = -1$;

$$\lim \frac{n^3}{n^2 + 3} = \lim \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^3}} = +\infty$$

Đáp án: (C).

b) $\lim \frac{n^2 - 3n + 2}{n^3 + 3n} = 1$; $\lim \frac{n^3 + 2n - 1}{n - 2n^3} = -\frac{1}{2}$;

$$\lim \frac{2n^2 - 3n}{n^3 + 3n} = \lim \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} = 0 \; ; \; \lim \frac{n^2 - n + 1}{2n - 1} = \lim \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} = +\infty.$$

Đáp án : (D)

c) $$\lim \frac{2^n + 1}{3.2^n - 3^n} = \lim \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{3.\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} = 0$$

$$\lim \frac{2^n + 3}{1 - 2^n} = \lim \frac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = -1$$

$$\lim \frac{1 - n^3}{n^2 + 2n} = \lim \frac{\frac{1}{n^3} - 1}{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = -\infty$$

$$\lim \frac{(2n + 1)(n - 3)^2}{n - 2n^3} = \lim \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)^2}{\frac{1}{n^2} - 2} = -1.$$

Đáp án: (A).

Bài 67. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây :

a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$ là:

(A) 2 ; (B) 1 ; (C) -2 ; (D) $-\frac{3}{2}$.

b) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\frac{x^2}{x^3 - x - 6}}$ là:

(A) $\frac{1}{2}$; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x}$ là:

(A) $\frac{5}{4}$; (B) 1 ; (C) $-\frac{5}{4}$; (D) -1.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2} = \frac{1 - 3}{-1 + 2} = -2$

Đáp án: (C)

b) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\frac{x^2}{x^3 - x - 6}} = \sqrt{\frac{9}{27 - 3 - 6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Đáp án : (D).

c) $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x} = \lim\limits_{x \to -4} \frac{(x - 1)(x + 4)}{x(x + 4)} = \lim\limits_{x \to -4} \frac{x - 1}{x} = \frac{5}{4}$.

Đáp án: (A)

Bài 68. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3}{x^6 + 5x^5}$ là:

(A) 2 ; (B) 0 ; (C) $-\dfrac{3}{5}$; (D) -3.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^5 + 7x^3 - 11}{x^5 + x^4 - 3x}$ là :

(A) 0 ; (B) -3 ; (C) 3 ; (D) $-\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^5 + x^4 - 3}{3x^2 - 7}$ là:

(A) $-\infty$; (B) -2 ; (C) 3 ; (D) $+\infty$.

Giải

a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3}{x^6 + 5x^5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2}{x^4} - \dfrac{3}{x^6}}{1 + \dfrac{5}{x}} = 0.$$

Đáp án: (B).

b) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^5 + 7x^3 - 11}{x^5 + x^4 - 3x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3 + \dfrac{7}{x^2} - \dfrac{11}{x^5}}{1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^4}} = -3.$$

Đáp án: (B).

c) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^5 + x^4 - 3}{3x^2 - 7} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^5}}{\dfrac{3}{x^3} - \dfrac{7}{x^5}} = +\infty.$$

Đáp án: (D) .

Bài 69. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ là:

(A) 1 ; (B) -1 ; C) 0 ; (D) $+\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 1}{x}$ là:

(A) $\dfrac{1}{2}$; (B) $-\dfrac{1}{2}$; (C) $+\infty$; (D) 0.

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - 1}{(x - 1)^2}$ là:

(A) 2 ; (B) -1 ; (C) $+\infty$; (D) $-\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 3x + 2}$ là:

(A) 2 ; (B) $\dfrac{2}{3}$; (C) -1 ; (D) 0.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} = 1$.

Đáp án: (A).

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = -\dfrac{1}{2}$.

Đáp án: (B).

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = +\infty$ (vì $\lim\limits_{x \to 1} 2x-1 = 1 > 0$, $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)^2 = 0$ và $(x-1)^2 > 0$ $\forall x \neq 1$).

Đáp án: (C).

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+x}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{x+2} = -1$.

Đáp án: (C).

Bài 70.

a) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là -1?

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{3x+x^2}$; (B) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+3}{x^2-5x}$;

(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-x^2+3}{5x^2-x^3}$; (D) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

b) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0?

(A) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^3-1}$; (B) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x+5}{x+10}$;

(C) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$; (D) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

c) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào không tồn tại?

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x^2+1}$; (B) $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$;

(C) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$; (D) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

Giải

a) Đáp án: (C)

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-x^2+3}{5x^2-x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{5}{x}-1} = -1$.

b) Đáp án: (D)

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$.

c) Đáp án: (B)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ không tồn tại. Vì : giả sử chọn hai dãy (x'_n) và (x''_n) với $x'_n=n2\pi$, $x''_n=\pi+n2\pi$ thỏa mãn $\lim x'_n=+\infty$; $\lim x''_n=+\infty$ nhưng $\lim\cos x'_n=\lim\cos n2\pi=1$; $\lim\cos x''_n=\lim\cos(\pi+n2\pi)=\lim(-1)=-1$.

Bài 71. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

$$\text{Hàm số } f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x} & \text{với } x<1,\ x\neq 0\\ 0 & \text{với } x=0\\ \sqrt{x} & \text{với } x\geq 1\end{cases}$$

(A) Liên tục tại mọi điểm trừ các điểm x thuộc đoạn $[0;1]$

(B) Liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

(C) Liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 0$.

(D) Liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 1$.

Giải

. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

. Ta có + $x<1, x\neq 0$: $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ liên tục

+ $x>1$: $f(x)=\sqrt{x}$.

+ Tại $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$ và $f(0)=0$.

=> f(x) liên tục tại $x = 0$

+ Tại $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x}=1$.

và $f(1)=1$.

=> f(x) liên tục tại $x = 1$

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Đáp án: (B)

Chương V: ĐẠO HÀM

§1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

a. Định nghĩa: Cho hàm số f(x) xác định trên (a; b) và $x_0 \in (a;b)$

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ trong đó: $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$) là đạo hàm của hàm số y = f(x) tại x_0.

* Số $\Delta x = x - x_0$ được gọi là số gia của biến số tại điểm x_0 ;

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia của hàm số ứng với số gia Δx tại điểm x_0.

Khi đó $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

b. Qui tắc tính đạo hàm theo định nghĩa:

Bước 1: Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (Δx là số gia của biến tại x_0)

Bước 2: Tìm $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

- Nhận xét: Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm x_0

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm: Đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$

+ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

4. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Xét chuyển động: s = s(t). Khi đó $v(t_0) = s'(t_0)$.

$v(t_0)$: vận tốc tức thời tại thời điểm t_0.

5. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

a) Định nghĩa: Hàm số f(x) được gọi là có đạo hàm trên khoảng J nếu nó có đạo hàm f(x) tại mọi x thuộc J

b) Đạo hàm của một số hàm số thường gặp.

+ Hàm số y = C có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(C)' = 0$;

+ Hàm số y = x có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x') = 1$;

+ Hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \ge 2)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n) = n.x^{n-1}$

+ Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ và $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 1: Tìm số gia của hàm số $y = x^2 - 1$ tại điểm $x_0 = 1$ ứng với số gia Δx, biết:

a) $\Delta x = 1$; b) $\Delta x = -0,1$.

Giải

a) Khi $\Delta x = 1$, $x_0 = 1$, $y = x^2 - 1$ ta có: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$\Leftrightarrow \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - 1 - \left[x_0^2 - 1\right] = (1+1)^2 - 1^2 = 3$.

b) Khi $\Delta x = -0,1$; $x_0 = 1, y = x^2 - 1$ ta có:

$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = (-0,1+1)^2 - 1 = -0,19$.

Bài 2. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0.

a) $y = 2x + 1, x_0 = 2$; b) $y = x^2 + 3x, x_0 = 1$.

Giải

a) Ta có: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(2 + \Delta x) + 1 - (2.2 + 1) = 2\Delta x$

Do đó: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2 = 2$. Vậy $y'(2) = 2$.

b) Ta có: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (1 + \Delta x)^2 + 3(1 + \Delta x) - 4$

$\Leftrightarrow \Delta y = \Delta x^2 + 5\Delta x$.

Do đó: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x^2 + 5\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 5) = 5$. Vậy $y'(1) = 5$

Bài 3. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0 (a là hằng số)

a) $y = ax + 3$; b) $y = \dfrac{1}{2}ax^2$.

Giải

a) Ta có: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a(x_0 + \Delta x) + 3 - (ax_0 + 3)$

$\Leftrightarrow \Delta y = a\Delta x$.

Do đó: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} a = a$. Vậy $y'(x_0) = a$

b) Ta có $\Delta y = \dfrac{1}{2}a(x_0 + \Delta x)^2 - \dfrac{1}{2}ax_0^2 = ax_0\Delta x + \dfrac{1}{2}a\Delta x^2$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a.x_0.\Delta x + \frac{1}{2}a\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(ax_0 + \frac{1}{2}a\Delta x\right) = ax_0.$$

Vậy $y'(x_0) = ax_0$

Bài 4. Cho parabol $y = x^2$ và hai điểm A(2 ; 4) và $B(2 + \Delta x; 4 + \Delta y)$ trên parabol đó

a) Tính hệ số góc của cát tuyến AB biết Δx lần lượt bằng 1; 0,1 và 0,01

b) Tính hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm A.

Giải

a) Gọi hệ số góc của cát tuyến AB là k

Ta có $k = \dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \dfrac{4 + \Delta y - 4}{2 + \Delta x - 2} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \Delta x + 4$

+ Khi $\Delta x = 1$ ta có : $k = 5$.

+ Khi $\Delta x = 0,1$ ta có: $k = \Delta x + 4 = 0,1 + 4 = 4,1$

+ Khi $\Delta x = 0,01$ ta có: $k = \Delta x + 4 = 0,01 + 4 = 4,01$

b) Ta có $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 4) = 4$

Vậy hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm A bằng 4

Bài 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$, biết

a) Tiếp điểm có hoành độ bằng -1 ;

b) Tiếp điểm có tung độ bằng 8 ;

c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

Giải

a) Ta có: $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = (-1)^3 = -1$

$$\Delta y = (-1 + \Delta x)^3 + 1 = \Delta_x^3 - 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x$$

$$\Rightarrow y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^3 - 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = 3$$

Vậy tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại $(-1; -1)$ là:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

$$\Leftrightarrow y = 3(x + 1) - 1 \Leftrightarrow y = 3x + 2.$$

b) Khi $y_0 = 8 \Leftrightarrow x_0^3 = 8 \Leftrightarrow x_0 = 2$

$$\Rightarrow y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^3 - 8}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left((\Delta x)^2 + 12 + 6\Delta x\right) = 12$$

Vậy tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại (2 ; 8) là:

$$y = 12(x - 2) + 8 \Leftrightarrow y = 12x - 16$$

c) Ta có:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3x_0^2.$$

Do hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3 nên $3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$

+ Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại (1 ; 1) là:

$$y = 3(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 2$$

+ Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại $(-1;-1)$ là:

$y = 3(x+1) - 1 \Leftrightarrow y = 3x + 2$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là: $y = 3x + 2$ và $y = 3x - 2$.

Bài 6. Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9{,}8\ m/s^2$ và t được tính bằng giây (s).

a) Tìm vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ với độ chính xác 0,001, biết t = 5 và Δt lần lượt bằng 0,1; 0,01 ; 0,001.

b) Tìm vận tốc tại thời điểm t = 5.

Hướng dẫn giải

a) Công thức tính vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ là:

$$v_{TB} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}g(2t + \Delta t)$$

+ Khi t = 5, $\Delta t = 0{,}1 \Rightarrow v_{TB} = \frac{1}{2}.9{,}8(2{,}5 + 0{,}1) = 49{,}49$ m/s.

+ Khi t = 5, $\Delta t = 0{,}01 \Rightarrow v_{TB} = 49{,}049$ m/s.

+ Khi t = 5, $\Delta t = 0{,}001 \Rightarrow v_{TB} \approx 49{,}005$ m/s.

b) Vận tốc tại thời điểm t = 5 là:

$$v(5) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2}g(2t + \Delta t) = gt = 9{,}8.5 = 49 \text{ m/s}.$$

Bài 7. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = x^5$ trên $\mathbb{R}$ rồi suy ra $f'(-1)$, $f'(-2)$ và $f'(2)$.

Giải

a) $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$

Từ đó $f'(-1) = 5(-1)^4 = 5$; $f'(-2) = 5(-2)^4 = 80$; $f'(2) = 80$.

Bài 8. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau trên $\mathbb{R}$

a) $y = ax^2$ (a là hằng số) ; b). $y = x^3 + 2$.

Hướng dẫn giải

a) $y = ax^2$ (a là hằng số), với mỗi $x \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a(2x + \Delta x) = 2ax$$

Vậy y' = 2ax

b) $y = x^3 + 2$, với mỗi $x \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 + 2 - (x^2 + 2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3\Delta x.x + 3x^2) = 3x^2.$$

Vậy $y' = 3x^2$.

Bài 9. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau.

a) $y = \dfrac{1}{2x-1}$ với $x \neq \dfrac{1}{2}$; b) $y = \sqrt{3-x}$ với $x < 3$

Hướng dẫn giải

a) $y = \dfrac{1}{2x-1}$, với mỗi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ ta có:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\dfrac{1}{2(x+\Delta x)-1} - \dfrac{1}{2x-1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{-2}{(2x-1)(2x+2\Delta x-1)} = \frac{-2}{(2x-1)^2}$$

Vậy $y' = \dfrac{-2}{(2x-1)^2}$.

b) Xét $y = \sqrt{3-x}$, với mỗi $x < 3$ ta có:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sqrt{3-(x+\Delta x)} - \sqrt{3-x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{3-x-\Delta x} + \sqrt{3-x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{-1}{\sqrt{3-x-\Delta x} + \sqrt{3-x}} = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}.$$

Vậy $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}}$.

LUYỆN TẬP

Bài 10.

a) Tính $f'(3)$ và $f'(-4)$ nếu $f(x) = x^3$

b) Tính $f'(1)$ và $f'(9)$ nếu $f(x) = \sqrt{x}$.

Hướng dẫn giải

a) $f(x) = x^3$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = 3x^2$.

Từ đó: $f'(3) = 27$; $f'(-4) = 48$.

b) $f(x) = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ và $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Từ đó $f'(1) = \dfrac{1}{2}$; $f'(9) = \dfrac{1}{6}$.

Bài 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và đồ thị (G). Mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Nếu $f'(x_0) = 0$ thì tiếp tuyến của (G) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ song song với trục hoành.

b) Nếu tiếp tuyến của (G) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ song song với trục hoành thì $f'(x_0) = 0$

Hướng dẫn giải

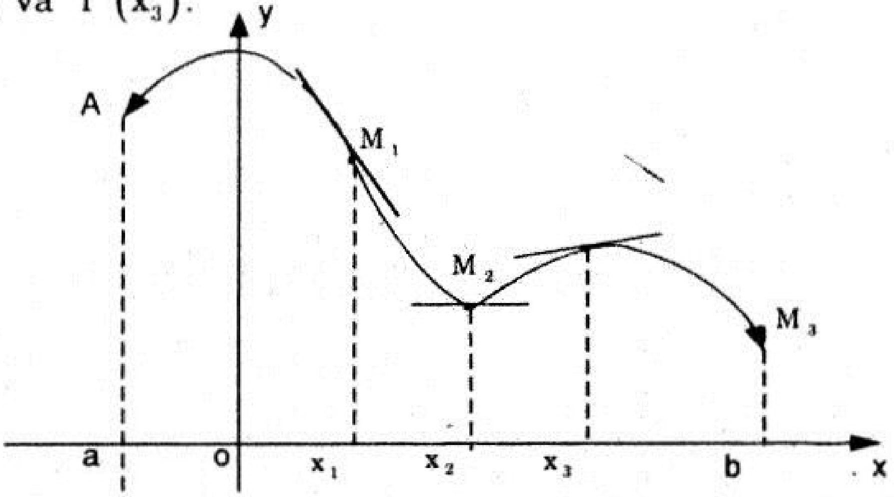
- Mệnh đề a) sai vì :

  Nếu $f'(x_0) = 0$ thì tiếp tuyến Δ của (G) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ có dạng: $y = y_0\ (\Delta)$.

  Khi $y_0 = 0$ thì Δ trùng với trục hoành; khi $y_0 \neq 0$ thì Δ song song với trục hoành.
- Mệnh đề b) đúng vì:

  Tiếp tuyến của (G) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ song song với trục hoành có dạng $y = y_0\ \ (y_0 \neq 0) \Leftrightarrow y = 0(x - x_0) + y_0$ hay $f'(x_0) = 0$.

Bài 12. Hình 5.4 là đồ thị của hàm số y = f(x) trên khoảng (a ; b). Biết rằng tại các điểm M_1, M_2 và M_3, đồ thị hàm số có tiếp tuyến được thể hiện trên hình vẽ. Dựa vào hình vẽ, hãy nêu nhận xét về dấu của $f'(x_1)$, $f'(x_2)$ và $f'(x_3)$.



hình 5.4

Hướng dẫn giải

Dựa vào đồ thị trên ta có:

$f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) = 0$ và $f'(x_3) > 0$ (sử dụng định nghĩa hệ số góc của đường thẳng).

Bài 13. Chứng minh rằng để đường thẳng y = ax + b là tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại điểm $(x_0; f(x_0))$, điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} a = f'(x_0) \\ ax_0 + b = f(x_0) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại điểm $(x_0; f(x_0))$ là:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0).x - f'(x_0).x_0 + f(x_0)$

Đường thẳng: $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0; f(x_0))$ thì điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} a = f'(x_0) \\ b = -f'(x_0).x_0 + f(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = f'(x_0) \\ b = -ax_0 + f(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = f'(x_0) \\ ax_0 + b = f(x_0) \end{cases}$$

Bài 14. Cho hàm số $y = |x|$

a) Chứng minh rằng hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 0$.

b) Tính đạo hàm của hàm số tại $x = 0$, nếu có.

c) Mệnh đề "Hàm số liên tục tại điểm x_0 thì có đạo hàm tại điểm x_0" đúng hay sai?

Giải

a) Xét tính liên tục $y = f(x) = |x|$, tại $x_0 = 0$.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} |x| = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$;

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} |x| = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = 0$.

Từ đây, ta có được: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Mặt khác: $f(0) = |0| = 0$

Vì vậy hàm số $y = |x|$ liên tục tại điểm $x = 0$.

b) Ta có: $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{(0 + \Delta x) - 0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{(0 + \Delta x) - 0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$

Do $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ nên hàm số $y = |x|$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

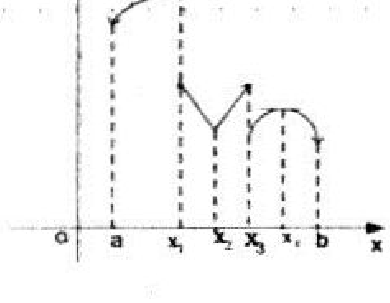
c) Mệnh đề sai vì hàm số $y = |x|$ liên tục tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại $x = 0$.

Bài 15. Hình 5.5 là đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$. Dựa vào hình vẽ hãy cho biết tại mỗi điểm x_1, x_2, x_3 và x_4.

a) Hàm số có liên tục hay không?

b) Hàm số có đạo hàm hay không?

Hãy tính đạo hàm nếu có.



Hướng dẫn giải

a) Hàm số gián đoạn tại x_1 và x_3 vì tại các điểm có hoành độ x_1, x_3 đồ thị không là đường liền.

Hàm số liên tục tại x_2 và x_4.

b) Hàm số có đạo hàm tại x_4 và $f'(x_4) = 0$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Số gia của hàm số $y = 3x^3 + 1$ tại điểm $x_0 = -1$ ứng với số gia $\Delta x = 2$ là:

(A) -6 ; (B) 6 ; (C) 0 ; (D) 30 .

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2x+1} - 4$ là:

(A) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$; (B) $\frac{2}{\sqrt{2x+1}}$;(C) $\frac{-1}{2\sqrt{2x+1}}$; (D) $\sqrt{2x+1}$.

3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^2$ tại điểm trên đồ thị có hoành độ bằng 2 là:

(A) $y = 4x + 4$; (B) $y = 4x - 4$; (C) $y = -4x + 4$; (D) $y = -4x - 4$.

4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 2$ khi hệ số góc của nó bằng 12 là:

(A) $y = 12x + 18$; (B) $y = 12x + 18$ và $y = 12x + 14$;

(C) $y = 12x - 14$; (D) $y = 12x - 14$ và $y = 12x + 18$.

5. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{2x-1}\left(x \neq \frac{1}{2}\right)$ tại điểm $x = 1$ là:

(A) 2 ; (B) -2 ; (C) -1 ; (D) 1

IV. ĐÁP ÁN

Câu hỏi	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(A)	(C)	(D)	(B

§2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Các qui tắc tính đạo hàm: ($u = u(x)$; $v = v(x)$)

$$\boxed{\begin{aligned}&(u \pm v)' = u' \pm v'\\&(uv)' = u'v + uv'\\&\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\end{aligned}}$$

2. Đạo hàm của hàm số hợp: $\left(g(x) = f\left[u(x)\right]\right)$

$$\boxed{g'_x = f'_u . u'_x}$$

3. Đạo hàm của một số hàm số thường gặp ($u = (u(x))$.

$(c)' = 0$ (c là hằng số)	
$(x)' = 1$	
$(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$(u^n)' = nu^{n-1}.u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 16. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0 được cho kèm theo.

a) $y = 7 + x - x^2, x_0 = 1$; b) $y = x^3 - 2x + 1, x_0 = 2$;

c) $y = 2x^5 - 2x + 3, x_0 = 1$.

Giải

a) $y' = 1 - 2x \Rightarrow y'(1) = 1 - 2 = -1$

b) $y' = 3x^2 - 2 \Rightarrow y'(2) = 3.2^2 - 2 = 10$.

c) $y' = 10x^4 - 2 \Rightarrow y'(1) = 8$.

Bài 17. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau (a và b là hằng số):

a) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3\sqrt{x}$; b) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4$;

c) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + a^3$; d) $y = \frac{ax + b}{a + b}$.

Giải

a) $y' = \left(x^5\right)' - 4\left(x^3\right)' + 2\left(x\right)' - 3\left(\sqrt{x}\right)'$

$$= 5x^4 - 12x^2 + 2 - \frac{3}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

b) $y' = \left(\frac{1}{4}\right)' - \frac{1}{3}(x)' + \left(x^2\right)' - 0,5\left(x^4\right)'$

$$= -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3.$$

c) $y' = \frac{4x^3}{4} - \frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{2} - 1 = x^3 - x^2 + x - 1$

d) $y' = \frac{1}{a+b}(ax+b)' = \frac{1}{a+b}\left[a(x') + b'\right] = \frac{a}{a+b}$.

Bài 18. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = \left(x^7 + x\right)^2$; b) $y = \left(x^2 + 1\right)\left(5 - 3x^2\right)$;

c) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$; d) $y = \frac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$;

e) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$; f) $y = x(2x - 1)(3x + 2)$.

Giải

a) $y = \left(x^7 + x\right)^2 \Rightarrow y' = 2\left(x^7 + x\right)\left(x^7 + x\right)' = 2\left(x^7 + x\right)\left(7x^6 + 1\right)$.

b) $y = \left(x^2 + 1\right)\left(5 - 3x^2\right) \Rightarrow y' = \left(x^2 + 1\right)'\left(5 - 3x^2\right) + \left(x^2 + 1\right)\left(5 - 3x^2\right)'$

$$= 2x\left(5 - 3x^2\right) + \left(x^2 + 1\right)(-6x) = 4x(-3x^2 + 1)$$

c) $y = \frac{2x}{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{(2x)'\left(x^2 - 1\right) - 2x\left(x^2 - 1\right)'}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{2\left(x^2 - 1\right) - 2x(2x)}{\left(x^2 - 1\right)^2}$

d) $y = \frac{5x - 3}{x^2 + x + 1} \Rightarrow y' = \frac{5\left(x^2 + x + 1\right) - (5x - 3)(2x + 1)}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}$

$$= \frac{-5x^2 + 6x + 8}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}.$$

e) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \Rightarrow y' = \frac{(2x + 2)(x + 1) - \left(x^2 + 2x + 2\right).1}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$.

f) Sử dụng công thức : $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

$y = x(2x - 1)(3x + 2)$

$\Rightarrow y' = (x)'(2x - 1)(3x + 2) + x(2x - 1)'(3x + 2) + x(2x - 1)(3x + 2)'$

$$= (2x - 1)(3x - 2) + 2x(3x + 2) + 3x(2x - 1)$$

$$= 18x^2 + 2x - 2$$

Bài 19. Tìm đạo hàm của hàm số sau:

a) $y = \left(x - x^2\right)^{32}$; b) $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$;

c) $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$; d) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số)

Giải

a) $y = \left(x - x^2\right)^{32} \Rightarrow y' = 32\left(x - x^2\right)^{31}\left(x - x^2\right)' = 32\left(x - x^2\right)^{31}(1 - 2x)$.

b) $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} \Rightarrow y' = -\dfrac{\left(x\sqrt{x}\right)'}{\left(x\sqrt{x}\right)^2} = -\dfrac{\sqrt{x} + x\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(x\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{-3x}{2\left(x\sqrt{x}\right)^2\sqrt{x}} = -\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$.

c) $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}} \Rightarrow y' = \dfrac{\sqrt{1 - x} - (1 + x)\left(\sqrt{1 - x}\right)'}{1 - x} = \dfrac{\sqrt{1 - x} - (1 + x)\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{1 - x}}\right)}{1 - x}$

$= \dfrac{2(1 - x) + 1 + x}{2(1 - x)\sqrt{1 - x}} = \dfrac{3 - x}{2(1 - x)\left(\sqrt{1 - x}\right)}$.

d) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow y' = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2} - x\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)'}{\left(a^2 - x^2\right)} = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2} - x\left(\dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)}{\left(a^2 - x^2\right)}$

$= \dfrac{\left(a^2 - x^2\right) + x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}.\left(a^2 - x^2\right)} = \dfrac{a^2}{\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^3}$.

Bài 20. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Hãy giải bất phương trình $f'(x) \le f(x)$.

Hướng dẫn giải

+ $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

+ $f'(x) \le f(x) \Leftrightarrow \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \le \sqrt{x^2 - 2x}$ (1)

Điều kiện: $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

$(1) \Leftrightarrow x - 1 \le \left(x^2 - 2x\right) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình (1) là:

$x \in (-\infty; 0) \cup \left[\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

LUYỆN TẬP

Bài 21. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Hãy giải bất phương trình :

a) $f'(x) > 0$; b) $f'(x) \le 3$.

Giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x$

a) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

b) $f'(x) \le 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x \le 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 \le 0 \Leftrightarrow x \in \left[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right]$.

Bài 22. Tìm nghiệm của phương trình sau (làm tròn kết quả nghiệm gần đúng đến hàng phần nghìn).

a) $f'(x) = 0$ với $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x - 1$;

b) $f'(x) = -5$ với $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - \dfrac{3x^2}{2} - 3$.

Giải

a) $f'(x) = x^2 - 4x - 6$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 \approx 5,162$; $x_2 \approx -1,162$.

b) $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 3x$

$$\Rightarrow f'(x) = -5 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x \approx 3,449 \\ x = -1,449 \end{array}\right.$$

Bài 23. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$; b) $y = \dfrac{1}{\left(x^2 - x + 1\right)^5}$;

c) $y = x^2 + x\sqrt{x} + 1$; d) $y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^2$;

e) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x}}$.

Giải

a) Hàm số $y = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$ có tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}; \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}\right\}$

$$y' = \frac{2\left(x^2 - 5x + 5\right) - (2x + 3)(2x - 5)}{\left(x^2 - 5x + 5\right)^2} = \frac{-2x^2 - 6x + 25}{\left(x^2 - 5x + 5\right)^2}$$

b) Hàm số $y = \dfrac{1}{\left(x^2 - x + 1\right)^5}$ có tập xác định : $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = -\dfrac{\left[\left(x^2 - x + 1\right)^5\right]'}{\left(x^2 - x + 1\right)^{10}} = -\dfrac{5\left(x^2 - x + 1\right)^4(2x - 1)}{\left(x^2 - x + 1\right)^{10}} = -\dfrac{5(2x - 1)}{\left(x^2 - x + 1\right)^6}$.

c) Hàm số $y = x^2 + x\sqrt{x} + 1$ có tập xác định : $D = (0; +\infty)$

Ta có: $y' = 2x + \sqrt{x} + x.\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2x + \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} = 2x + \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

d) Hàm số $y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^2$ có tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = (x + 2)^2(x + 3)^2 + (x + 1)(x + 3)^2 2(x + 2) + (x + 1)(x + 2)^2 .3(x + 3)^2$$

$$= (x + 2)(x + 3)^3\left[x + 2 + 2(x + 1) + 3(x + 1)(x + 2)\right]$$

$$= 2(x + 2)(x + 3)^2\left(3x^2 + 11x + 9\right)$$

e) Hàm số $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x}}$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$

Ta có: $y' = \dfrac{\left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x}}} = \dfrac{\dfrac{2x.x - \left(x^2 + 1\right)}{x^2}}{2\sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x}}} = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2\sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x}}} = \dfrac{x^2 - 1}{2\sqrt{x^3\left(x^2 + 1\right)}}$.

Bài 24. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số:

a) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$, biết hoành độ tiếp điểm là $x_0 = 0$.

b) $y = \sqrt{x + 2}$, biết tung độ tiếp điểm là $y_0 = 2$.

Giải

a) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1} \Rightarrow y' = \dfrac{2}{(x + 1)^2}$.

Ta có: $y'(0) = 2$.

Khi $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = y'(0)(x - 0) - 1 = 2x - 1.$$

b) $y = \sqrt{x + 2} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 2}}$

Ta có: $y_0 = 2 \Rightarrow \sqrt{x_0 + 2} = 2 \Leftrightarrow x_0 + 2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Vì thế: $y'(x_0) = y'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2 + 2}} = \dfrac{1}{4}$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = \frac{1}{4}(x - 2) + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

Bài 25. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ biết tiếp tuyến đi qua A(0 ; –1).

Giải

Phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm $(x_0; x_0^2)$ thuộc parabol có dạng :

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + x_0^2 = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 = 2x_0x - x_0^2.$$

Để tiếp tuyến đi qua A(0 ; –1) thì :

$$-1 = 2x_0.0 - x_0^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$y = 2x - 1$

và $y = -2x - 1$

Bài 26. Hình 5.6 (SGK) thể hiện màn hình của một trò chơi điện tử.Một máy bay xuất hiện ở bên trái màn hình rồi bay sang phải theo một quỹ đạo (C) có phương trình y = f(x), trong đó $f(x) = -1 - \frac{1}{x}$, (x >0).

Biết rằng tên lửa được bắn ra từ máy bay tại một điểm thuộc (C) sẽ bay theo phương tiếp tuyến của (C) tại điểm đó. Tìm hoành độ các điểm thuộc (C) sao cho tên lửa bắn ra từ đó có thể bắn trúng một trong bốn mục tiêu nằm ở trên màn hình có tọa độ (1; 0), (2 ; 0), (3 ; 0) và (4 ; 0) (làm tròn kết quả đến hàng phần vạn).

Hướng dẫn giải

Quĩ đạo (C) có phương trình $y = f(x) = -1 - \frac{1}{x}$ (x >0)

Xét $\left(x_0; -1 - \frac{1}{x_0}\right) \in (C)(x_0 > 0)$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $\left(x_0; -1 - \frac{1}{x_0}\right)$ là:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) - 1 - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0^2}(x - x_0) - 1 - \frac{1}{x_0}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{x_0^2}.x - 1 - \frac{2}{x_0}.$$

+ Để tên lửa bắn trúng mục tiêu trên màn hình có tọa độ (1; 0), tức là tên lửa phải đi qua điểm (1; 0), điều này tương đương với:

$$0 = \frac{1}{x_0^2} - 1 - \frac{2}{x_0} \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 \approx 0,4142.$$

Tương tự:

+ Tên lửa bắn trúng mục tiêu có tọa độ (2; 0) khi:

$$0 = \frac{2}{x_0^2} - 1 - \frac{2}{x_0} \Rightarrow x_0 \approx 0,7321$$

+ Tên lửa bắn trúng mục tiêu có tọa độ (3; 0) khi:

$$0 = \frac{3}{x_0^2} - 1 - \frac{2}{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 1$$

+ Tên lửa bắn trúng mục tiêu có tọa độ (4; 0) khi:

$$0 = \frac{4}{x_0^2} - 1 - \frac{2}{x_0} \Rightarrow x_0 \approx 1,2361$$

Bài 27. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196$ m/s. (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó, viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

Hướng dẫn giải

Phương trình chuyển động của viên đạn là:

$$s(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 196t - \frac{gt^2}{2}$$

$$s'(t) = 196 - gt$$

Vận tốc của viên đạn tại thời điểm t_0 là :

$$v(t_0) = 196 - gt_0.$$

Vận tốc triệt tiêu khi: $v(t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{196}{g} = 20 \;\; (g = 9,8 \text{ m}/\text{s}^2)$ (S)

Khi đó viên đạn cách mặt đất:

$$s(t_0) = 196t_0 - \frac{gt_0^2}{2} = 196.20 - \frac{9,8.20^2}{2} = 1960 \text{ m}.$$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Đạo hàm của hàm số $y = \left(\frac{5}{3}x^4 - 6x\right)^7$ là:

(A) $7\left(\frac{5}{3}x^4 - 6x\right)^6$; (B) $\left(\frac{20}{3}x^3 - 6\right)^6$;

(C) $7\left(\frac{5}{3}x^4 - 6\right)\left(\frac{5}{3}x^4 - 6x\right)^6$; (D) $7\left(\frac{20}{3}x^3 - 6\right)\left(\frac{5}{3}x^4 - 6x\right)^6$.

2. Cho $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 1}}$. $y'(0)$ là:

(A) 1 ; (B) 0 ; (C) –1 ; (D) –2.

3. Cho $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 6$. Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là:

(A) $x = -1$; $x = 4$; (B) $x = 1$; $x = 4$

(C) $x = 0$; $x = 3$; (D) $x = -1$

4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x - 1}$ tại điểm trên đồ thị có hoành độ bằng 0 là:

(A) $y = -2x + 1$; (B) $y = 2x - 1$;

(C) $y = 2x + 1$; (D) $y = -2x - 1$.

5. Đạo hàm của hàm số $y = 3x^2 + 2\sqrt{x-1} + (x-1)x^2$ là:

(A) $3x^3 + 4x + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$; (C) $6x + \frac{2}{\sqrt{x-1}} + 2x^2$;

(B) $2x^2 + 6x + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$; (D) $3x^3 - 4x + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu hỏi	1	2	3	4	5
Đáp án	(D)	(B)	(A)	(D)	(A)

§3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Mở rộng: Nếu hàm số $u = u(x)$ thỏa mãn điều kiện $u(x) \neq 0 \quad \forall x \neq x_0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$.

2. $(\sin u)' = (\cos u).u' = u' \cos u$;

Cụ thể: $(\sin x)' = \cos x$.

3. $(\cos u)' = (-\sin u)u' = -u'\sin u$;

Cụ thể: $(\cos x)' = -\sin x$.

4. $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;

Cụ thể: $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

5. $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

Cụ thể: $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 28. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$; c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x.\sin 5x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x.\frac{\sin 5x}{5x}.\cos 2x}.\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$

(vì $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}=1$ và $\lim\limits_{x\to0}\cos 2x=\cos 0=1$)

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{2x.\sin x.\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2x.\cos x}=\frac{1}{2}$

(vì $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ và $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$).

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 0+\cos 0}{\sin 0-\cos 0}=\frac{0+1}{0-1}=-1$.

Bài 29. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=5\sin x-3\cos x$; b) $y=\sin\left(x^2-3x+2\right)$;

c) $y=\cos\sqrt{2x+1}$; d) $y=2\sin 3x\cos 5x$;

e) $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$; f) $y=\sqrt{\cos 2x}$.

Giải

a) $y=5\sin x-3\cos x\Rightarrow y'=5(\sin x)'-3(\cos x)'=5\cos x+3\sin x$

b) $y=\sin\left(x^2-3x+2\right)\Rightarrow y'=\left(x^2-3x+2\right)'\cos\left(x^2-3x+2\right)$

$=(2x-3)\cos\left(x^2-3x+2\right)$.

c) $y=\cos\sqrt{2x+1}\Rightarrow y'=-\left(\sqrt{2x+1}\right)'\sin\sqrt{2x+1}=-\frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}.\sin\sqrt{2x+1}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}.\sin\sqrt{2x+1}$.

d) $y=2\sin 3x\cos 5x\Leftrightarrow y=\sin 8x+\sin(-2x)=\sin 8x-\sin 2x$

$$\Rightarrow y' = 8\cos 8x - 2\cos 2x.$$

e)

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \Rightarrow y' = \frac{(\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}.$$

f) $y = \sqrt{\cos 2x} \Rightarrow y' = \dfrac{(\cos 2x)'}{2\sqrt{\cos 2x}} = \dfrac{-2\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}} = \dfrac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$

Bài 30. Chứng minh rằng hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$ có đạo hàm bằng 0.

Giải

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + 3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) + 3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^2 x = 1$$

Vậy $y' = (1)' = 0$.

Bài 31. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \tan\dfrac{x+1}{2}$; b) $y = \cot\sqrt{x^2+1}$;

c) $y = \tan^3 x + \cot 2x$; d) $y = \tan 3x - \cot 3x$;

e) $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$; f) $y = x\cot x$.

Giải

a) $y = \tan\dfrac{x+1}{2} \Rightarrow y' = \dfrac{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)'}{\cos^2\dfrac{x+1}{2}} = \dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x+1}{2}}.$

b) $y = \cot\sqrt{x^2+1} \Rightarrow y' = -\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sin^2\sqrt{x^2+1}} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\sqrt{x^2+1}}$

c) $y = \tan^3 x + \cot 2x \Rightarrow y' = 3.\tan^2 x.(\tan x)' + \dfrac{-(2x)'}{\sin^2 2x}$

$$= 3\tan^2 x.\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 2x} = \frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x} - \frac{2}{\sin^2 2x}.$$

d) $y = \tan 3x - \cot 3x \Rightarrow y' = \dfrac{3}{\cos^2 3x} + \dfrac{3}{\sin^2 3x} = \dfrac{3}{\sin^2 3x.\cos^2 3x} = \dfrac{12}{\sin^2 6x}.$

e) $y = \sqrt{1+2\tan x} \Rightarrow y' = \dfrac{(1+2\tan x)'}{2\sqrt{1+2\tan x}} = \dfrac{\dfrac{2}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1+2\tan x}}$

$$= \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+2\tan x}}.$$

f) $y = x\cot x \Rightarrow y' = (x)'\cot x + x(\cot x)' = \cot x + x.\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

$$= \cot x - \frac{x}{\sin^2 x}.$$

Bài 32. Chứng minh rằng:

a) Hàm số y = tanx thỏa mãn hệ thức $y' - y^2 - 1 = 0$;

b) Hàm số y = cot2x thỏa mãn hệ thức $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $y = \tan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Khi đó : $y' - y^2 - 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x} - (\tan x)^2 - 1 = 1 + \tan^2 x - \tan^2 x - 1 = 0$

b) $y = \cot 2x \Rightarrow y' = -\dfrac{2}{\sin^2 2x}$

Khi đó $y' + 2y^2 + 2 = -\dfrac{2}{\sin^2 2x} + 2\cot^2 2x + 2 = -\dfrac{2}{\sin^2 2x} + 2.\dfrac{1}{\sin^2 2x} = 0$

.

LUYỆN TẬP

Bài 33. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$; b) $y = \dfrac{\sin^2 x}{1+\tan 2x}$;

c) $y = \tan(\sin x)$; d) $y = x\cot(x^2 - 1)$;

e) $y = \cos^2\sqrt{\dfrac{\pi}{4} - 2x}$; f) $y = x\sqrt{\sin 3x}$.

Giải

a) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x} \Rightarrow y' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} + \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$

$$= (x\cos x - \sin x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

b) $y = \dfrac{\sin^2 x}{1+\tan 2x} \Rightarrow y' = \dfrac{(2\sin x\cos x)(1+\tan x) - \sin^2 x\left(\dfrac{2}{\cos^2 2x}\right)}{(1+\tan 2x)^2}$

$$= \frac{\sin 2x}{1 + \tan x} - \frac{2\sin^2 x\left(1 + \tan^2 2x\right)}{\left(1 + \tan 2x\right)^2}.$$

c) $y = \tan\left(\sin x\right) \Rightarrow y' = \dfrac{\left(\sin x\right)'}{\cos^2\left(\sin x\right)} = \dfrac{\cos x}{\cos^2\left(\sin x\right)}.$

d) $y = x\cot\left(x^2 - 1\right) \Rightarrow y' = \cot\left(x^2 - 1\right) + x\dfrac{-2x}{\sin^2\left(x^2 - 1\right)}$

$$= \frac{\cos\left(x^2 - 1\right)}{\sin\left(x^2 - 1\right)} - \frac{2x^2}{\sin^2\left(x^2 - 1\right)} = \frac{\sin 2\left(x^2 - 1\right) - 4x^2}{2\sin^2\left(x^2 - 1\right)}.$$

e) $y = \cos^2\sqrt{\dfrac{\pi}{4} - 2x} \Rightarrow y' = 2\cos\sqrt{\dfrac{\pi}{4} - 2x}.\left(\cos\sqrt{\dfrac{\pi}{4} - 2x}\right)'$

$$= 2\cos\sqrt{\frac{\pi}{4} - 2x}.\left[-\left(\sqrt{\frac{\pi}{4} - 2x}\right)'\sin\sqrt{\frac{\pi}{4} - 2x}\right]$$

$$= -2\cos\sqrt{\frac{\pi}{4} - 2x}\left(\frac{-1}{\sqrt{\frac{\pi}{4} - 2x}}\right).\sin\sqrt{\frac{\pi}{4} - 2x}$$

$$= \frac{\sin 2\sqrt{\frac{\pi}{4} - 2x}}{\sqrt{\frac{\pi}{4} - 2x}} = \frac{2\sin\sqrt{\pi - 8x}}{\sqrt{\pi - 8x}}.$$

f) $y = x\sqrt{\sin 3x} \Rightarrow y' = \sqrt{\sin 3x} + x.\dfrac{\left(\sin 3x\right)'}{2\sqrt{\sin 3x}}$

$$= \sqrt{\sin 3x} + \frac{x.3.\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}} = \frac{2\sin 3x + 3x\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}.$$

Bài 34. Tính $f'(\pi)$ nếu $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x - x\sin x}$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$f'(x) = \frac{\left(\cos x - \cos x + x\sin x\right)\left(\cos x - x\sin x\right) - \left(\sin x - x\cos x\right)\left(-\sin x - \sin x - x\cos x\right.}{\left(\cos x - x\sin x\right)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 2\sin^2 x}{\left(\cos x - x\sin x\right)^2}.$$

$$f'(\pi) = \frac{-\pi^2 - 2\sin^2\pi}{\left(\cos\pi - \pi\sin\pi\right)^2} = -\pi^2.$$

Bài 35. Giải phương trình $y' = 0$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $y = \sin 2x - 2\cos x$; b) $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x + 10x$;

c) $y = \cos^2 x + \sin x$; d) $y = \tan x + \cot x$.

Giải

a) $y = \sin 2x - 2\cos x \Rightarrow y' = 2\cos 2x + 2\sin x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x + 2\sin x = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1. \\ \sin x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi. \end{array}\right.$$

b) $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x + 10x \Rightarrow y' = 6\cos 2x - 8\sin 2x + 10$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6\cos 2x - 8\sin 2x = -10 \Leftrightarrow \frac{4}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x = 1$$

Đặt $\frac{4}{5} = \cos\alpha$; $\frac{3}{5} = \sin\alpha$.

Khi đó ta có: $\sin(2x - \alpha) = 1 \Leftrightarrow 2x - \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $y = \cos^2 x + \sin x \Rightarrow y' = -2\cos x.\sin x + \cos x = \cos x(1 - 2\sin x)$

$$y = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

d) $y = \tan x + \cot x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{-\cos 2x}{\dfrac{\sin^2 2x}{4}} = \dfrac{-4\cos 2x}{\sin^2 2x}$.

$$y = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 36. Cho hàm số $f(x) = 2\cos^2(4x - 1)$. Chứng minh **rằng với mọi x ta có:** $|f'(x)| \le 8$. Tìm giá trị của x để đẳng thức xảy ra.

Giải

Ta có: $f(x) = 2\cos^2(4x-1) = 1 + \cos(8x-2)$

$\Rightarrow f'(x) = -8\sin(8x-2) \Rightarrow |f'(x)| = |-8\sin(8x-2)| = 8|\sin(8x-2)|$

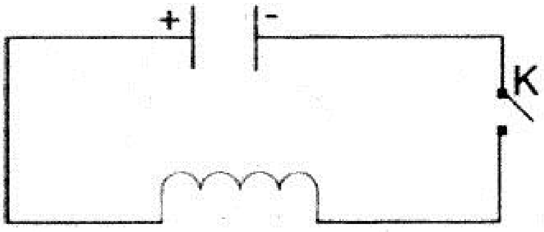
Do $|\sin(8x-2)| \le 1\ \forall x$ nên $|f'(x)| \le 8\ \forall x$.

- Dấu "=" xảy ra khi : $\sin(8x-2) = 1 \Leftrightarrow 8x - 2 = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z})$..

Bài 37. Cho mạch điện như hình 5.7. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0. Khi đóng khoá K, tụ điện phóng điện qua cuộn dây; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức: $q(t) = Q_0 \sin\omega t$, trong đó, ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ I(t) của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức: $I(t) = q'(t)$.

Cho biết $Q_0 = 10^{-8}C$ và $\omega = 10^6\pi$ rad/s. Hãy tính cường độ của dòng điện tại thời điểm t = 6 (s) (tính chính xác đến 10^{-5} mA).



Hướng dẫn giải

Ta có: $I(t) = q'(t) = Q_0.\omega.\cos\omega t$.

Cường độ dòng điện tại thời điểm t = 6 là:

$I = 10^{-8}.10^6\pi\cos 10^6\pi 6 = 10^{-2}\pi \approx 31,41593$ mA.

Bài 38. Cho hàm số $y = \cos^2 x + m\sin x$ (m là tham số) có đồ thị là (C). Tìm m trong mỗi trường hợp sau:

a) Tiếp tuyến của (C) tại điểm với hoành độ $x = \pi$ có hệ số góc bằng 1

b) Hai tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = -\frac{\pi}{4}$ và $x = \frac{\pi}{3}$ song song với nhau.

Giải

a) $y = \cos^2 x + m\sin x \Rightarrow y' = 2\cos x(-\sin x) + m\cos x$

$= -\sin 2x + m\cos x$.

$y'(\pi) = -\sin 2\pi + m\cos\pi = -m$.

Để tiếp tuyến của (C) tại điểm ứng với hoành độ $x = \pi$ có hệ số góc bằng 1 thì $-m = 1 \Leftrightarrow m = -1$.

b) Ta có: $y'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2\left(-\frac{\pi}{4}\right)+m\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1+\frac{m}{\sqrt2}=-1+\frac{m\sqrt2}{2}$

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2.\frac{\pi}{3}+m\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt3}{2}+\frac{m}{2}.$$

Hai tiếp tuyến của (C) tại các điểm có hoành độ $x=-\frac{\pi}{4}$ và $x=\frac{\pi}{3}$ song song với nhau thì:

$$1-\frac{m}{\sqrt2}=\frac{\sqrt3}{2}+\frac{m}{2}\Leftrightarrow m\left(\sqrt2-1\right)=-\sqrt3-2$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{-\sqrt3-2}{\sqrt2-1}$$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{1-\cos 5x}$ là:

(A) $\frac{18}{25}$; (B) $-\frac{18}{25}$; (C) 0 ; (D) $\frac{3}{5}$.

2. Đạo hàm của $y=\sin 3x-\sqrt{\cos x}$ là:

(A) $\cos 3x-\sqrt{\sin x}$; (B) $\cos 3x-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$;

(C) $3\cos 3x+\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$; (D) $3\cos 3x-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$.

3. Đạo hàm của hàm số $y=x\tan(2x+1)-4\cot x$ là:

(A) $\tan(2x+1)+\frac{4}{\sin^2 x}$; (B) $\tan(2x+1)+\frac{2x}{\cos^2(2x+1)}-\frac{4}{\sin^2 x}$

;

(C) $\tan(2x+1)+\frac{x}{\cos^2(2x+1)}$; (D) $\tan(2x+1)+\frac{2x}{\cos^2(2x+1)}+\frac{4}{\sin^2 x}$.

4. Cho $y=\tan 3x-\cot 3x$. Nghiệm của phương trình $y'=0$ là:

(A) $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$; (B) vô nghiệm ; (C) $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$; (D) $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$.

5. Cho đồ thị hàm số $y=\sin^2 x-2\cos 2x$ (C). Tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ $x=-\frac{\pi}{4}$ có hệ số góc là:

(A) –5 ; (B) 5 ; (C) 0 ; (D) –1.

IV. ĐÁP ÁN

Câu hỏi	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(C)	(D)	(B)	(A)

§4. VI PHÂN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vi phân của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0. Khi đó vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 (ứng với số gia Δx) được ký hiệu là $df(x_0)$ và $df(x_0)=f'(x_0).\ \Delta x$

2. Công thức tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x.$$

3. Vi phân của hàm số

$$df(x) = f'(x)dx \text{ hay } dy = y'dx$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 39. Tính vi phân của hàm số $f(x) = \sin 2x$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x = 0,01$; $\Delta x = 0,001$.

Giải

$f(x) = \sin 2x \Rightarrow f'(x) = 2\cos 2x.$

Khi $x_0 = \dfrac{\pi}{3}; \Delta x = 0,01$ ta có: $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = 2.\cos\left(2.\dfrac{\pi}{3}\right).0,01$

$$= 2.\left(-\frac{1}{2}\right).0,01 = -0,01.$$

Khi $x_0 = \dfrac{\pi}{3}; \Delta x = 0,001$ ta có: $df(x_0) = 2.\left(-\dfrac{1}{2}\right).0,001 = -0,001.$

Bài 40. Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{a+b}$; b) $y = x\sin x$;

c) $y = x^2 + \sin^2 x$; d) $y = \tan^3 x$.

Giải

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{a+b} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}.$

Do đó $dy = f'(x)dx = \dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}dx$

b) $y = x\sin x \Rightarrow y' = \sin x + x\cos x$

Do đó $dy = (\sin x + x\cos x)dx$

c) $y = x^2 + \sin^2 x \Rightarrow y' = 2x + 2\sin x\cos x = 2x + \sin 2x$

Do đó $dy = (2x + \sin 2x)dx$

d. $y = \tan^3 x \Rightarrow y' = 3\tan^2 x.\dfrac{1}{\cos^2 x} = 3\tan^2 x\left(1 + \tan^2 x\right)$

Do đó $dy = 3\tan^2 x\left(1 + \tan^2 x\right)dx$

Bài 41. Tìm giá trị gần đúng của các số sau (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)

a) $\dfrac{1}{0,9995}$; b) $\sqrt{0,996}$; c) $\cos 45^0 30'$

Giải

Sử dụng công thức $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$.

a) Do $\dfrac{1}{0,9995} = \dfrac{1}{1 - 0,005}$ nên ta xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tại điểm $x_0 = 1$; số gia $\Delta x = -0,005$.

Ta có: $f\left(\dfrac{1}{1 - 0,005}\right) \approx f(1) + f'(1).(-0,005) = 1 + \left(-\dfrac{1}{1^2}\right).(-0,005)$

$= 1 + 0,005 = 1,005$

hay $\dfrac{1}{0,9995} \approx 1,005$.

b) $\sqrt{0,996} = \sqrt{1 - 0,004}$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ tại $x_0 = 1$; $\Delta x = -0,004$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'\left(\sqrt{1 - 0,004}\right) \approx f(1) + f'(1).(-0,004)$

hay $\sqrt{0,996} \approx 1 + \dfrac{1}{2}(-0,004) = 0,998$

c) $45^0 30' = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{360}$

Xét hàm số $f(x) = \cos x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; $\Delta x = \dfrac{\pi}{360}$

Ta có: $f'(x) = -\sin x$

$f\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{360}\right) \approx f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right).\dfrac{\pi}{360} = \cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{4}.\dfrac{\pi}{360} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \dfrac{\pi}{360}\right)$

hay $\cos 45^0 30' \approx 0,7009$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Vi phân của hàm số $f(x) = \cos 3x$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{2}$ ứng với $\Delta x = 0,01$ là:

(A) –0,03 ; (B) 0,03 ; (C) 0 ; (D) 0,01.

2. Vi phân của hàm số $y = \sqrt{2x+1} - \frac{1}{x}$ là:

(A) $dy = \left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{1}{x^2}\right)dx$; (B) $dy = \left(\frac{2x}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{x^2}\right)dx$;

(C) $dy = \left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{x^2}\right)dx$; (D) $dy = \left(\frac{2}{\sqrt{2x+1}} + \frac{1}{x^2}\right)dx$.

3. Vi phân của hàm số $y = x\cot x$ là:

(A) $dy = \left(\cot x + \frac{x}{\sin^2 x}\right)dx$; (B) $dy = -\frac{x}{\sin^2 x}dx$;

(C) $dy = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$; (D) $dy = \left(\cot x - \frac{x}{\sin^2 x}\right)dx$.

4. Giá trị gần đúng của $\sqrt{4,01}$ là:

(A) 2,002 ; (B) 2,025 ; (C) 2,00025 ; (D) 2,0025.

5. Vi phân của hàm số $y = \sqrt{\tan x}$ là:

(A) $dy = \frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}dx$; (B) $dy = \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}dx$;

(C) $dy = -\frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}dx$; (D) $dy = \frac{\tan^2 x}{x\sqrt{\tan x}}dx$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu hỏi	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(A)	(D)	(D)	(A)

§5. ĐẠO HÀM CẤP CAO

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đạo hàm cấp hai

Ký hiệu : f'' và $f''=(f')'$

2. Đạo hàm cấp cao

$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]'$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq \mathbb{Z})$.

3. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai.

Xét chất điểm chuyển động với phương trình $s = s(t)$

Khi đó $a(t_0) = s''(t_0)$

($a(t_0)$ là gia tốc tức thời tại thời điểm t_0)

II. BÀI TẬP CĂN BẢN TRONG SGK

Bài 42. Tìm đạo hàm của hàm số sau đến cấp được cho kèm theo

a) $f(x) = x^4 - \cos 2x$, $f^{(4)}(x)$; b) $f(x) = \cos^2 x$, $f^{(5)}(x)$;

c) $f(x) = (x + 10)^6$, $f^{(n)}(x)$.

Giải

a) Ta có: $f(x) = x^4 - \cos 2x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2\sin 2x$

$\Rightarrow f^{('')}(x) = 12x^2 + 4\cos 2x \Rightarrow f^{(3)}(x) = 24x - 8\sin 2x$

$f^{(4)}(x) = 24 - 16\cos 2x$

b) $f(x) = \cos^2 x$

$\Rightarrow f'(x) = -2\cos x.\sin x = -\sin 2x$

$f^{('')}(x) = -2\cos 2x \Rightarrow f^{(3)}(x) = 4\sin 2x$

$f^{(4)}(x) = 8\cos 2x \Rightarrow f^{(5)}(x) = -16\sin 2x$

$f(x) = (x + 10)^6$

$\Rightarrow f'(x) = 6(x + 10)^5$; $f''(x) = 30(x + 10)^4$; $f^{(3)}(x) = 120(x + 10)^3$

$f^{(4)}(x) = 360(x + 10)^2$; $f^{(5)}(x) = 720(x + 10)$; $f^{(6)}(x) = 720$;

$f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall n \ge 7$.

Bài 43. Chứng minh rằng với mọi $n \ge 1$, ta có:

a) Nếu $f(x) = \dfrac{1}{x}$ thì $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$.

b) Nếu $f(x) = \cos x$ thì $f^{(4n)}(x) = \cos x$

c) Nếu $f(x) = \sin ax$ (a là hằng số) thì $f^{(4n)}(x) = a^{4n}.\sin ax$

Hướng dẫn giải

Sử dụng phương pháp qui nạp toán học để chứng minh.

a) Nếu $f(x) = \dfrac{1}{x}$ thì $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$ (1) $\forall n \ge 1$

- Với n = 1 => $f'(x) = \dfrac{(-1).1!}{x^2} = \dfrac{-1}{x^2}$ (luôn đúng)
- Giả sử (1) đúng với n = k ($k \ge 2$) tức $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k.k!}{k+1}$. Ta phải chứng minh (1) đúng với n = k + 1, tức là phải chứng minh:

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}.(k+1)!}{x^{k+2}}.$$

Thật vậy : $f^{(k+1)}(x) = \left[f^{(k)}(x)\right]' = \left(\dfrac{(-1)^k.k!}{x^{k+1}}\right)' = \dfrac{-(-1)^k k!(k+1)x^k}{x^{2k+2}}$

$$= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{x^{k+2}}.$$

b) Nếu $f(x) = \cos x$ thì $f^{(4n)}(x) = \cos x$, $\forall n \geq 1$ (2)

Hướng dẫn: n=1, $f^{(4)}(x) = \cos x$ (luôn đúng)

$n = k$ ta có $f^{(4k)}(x) = \cos(x)$.Ta chứng minh (2) đúng với $n = k + 1$. Thật vậy khi $n = k + 1$, ta có $f^{(4k+4)}(x) = \left[f^{(4k)}(x)\right]^{(4)} = (\cos)^{(4)} = \cos x$

c) Nếu $f(x) = \sin ax$ (a là hằng số) thì $f^{(4n)}(x) = a^{4n}.\sin ax$, $\forall n \geq 1$ (3)

Hướng dẫn:

$n = 1 \Rightarrow f^{4}(x) = a^{4}.\sin ax$ (luôn đúng)

$n = k \Rightarrow f^{(4k)}(x) = a^{4k}.\sin ax$. Ta chứng minh (3) đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy:

Khi $n = k + 1$ ta có
$$f^{(4k+4)}(x) = \left[f^{(4k)}(x)\right]^{(4)} = \left(a^{4k}.\sin ax\right)^{(4)}$$
$$= a^{4k}.(\sin ax)^{(4)} = a^{4k}.a^{4}.\sin ax$$
$$= a^{4k+4}.\sin ax = a^{4(k+1)}.\sin ax$$

Bài 44. Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$. Trong đó t tính bằng giây (s), $t > 0$ và v(t) tính bằng mét/giây (m/s). Tìm gia tốc của chất điểm

a) Tại thời điểm $t = 4$.

b) Tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 11.

Giải

$v(t) = 8t + 3t^2 \Rightarrow v'(t) = 8 + 6t$.

a) Gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 4$(s) là:

$a(4) = v'(4) = 8 + 6.4 = 32\ (m/s^2)$

b) Khi $v(t) = 11$ ta có $8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{11}{3}\ \text{(loại)} \end{array}\right.$

Gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 1$(s) là:

$a(1) = v'(1) = 8 + 6 = 14\ (m/s^2)$

LUYỆN TẬP

Bài 45. Tính vi phân của mỗi hàm số sau:

a) $y = \tan^2 3x - \cot 3x^2$; b) $y = \sqrt{\cos^2 2x + 1}$.

Giải

a) $y = \tan^2 3x - \cot 3x^2 \Rightarrow y' = 2\tan 3x\left(\dfrac{3}{\cos^2 3x}\right) + \dfrac{6x}{\sin^2 3x^2}$

$$= \frac{6\sin 3x}{\cos^3 3x} + \frac{6x}{\sin^2 3x^2}.$$

$$\Rightarrow dy = \left(\frac{6\sin 3x}{\cos^3 3x} + \frac{6x}{\sin^2 3x^2}\right)dx$$

b) $y = \sqrt{\cos^2 2x + 1} \Rightarrow dy = \frac{2(-\sin 2x)\cos 2x}{2\sqrt{\cos^2 2x + 1}}dx$

$$\Leftrightarrow dy = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{\cos^2 2x + 1}}dx$$

Bài 46. Dùng vi phân để tính gần đúng (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn) :

a) $\frac{1}{\sqrt{20{,}3}}$; b) $\tan 29^0 30'$.

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ tại điểm $x_0 = 20{,}25 = 4{,}5^2$ và $\Delta x = 0{,}05$

$$y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

Khi đó $\frac{1}{\sqrt{20{,}3}} \approx \frac{1}{\sqrt{4{,}5^2}} + \left(-\frac{1}{2.20{,}25\sqrt{4{,}5^2}}\right).0{,}05 \approx 0{,}222$

b) Xét hàm số $y = \tan x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{6}$ và $\Delta x = -\frac{\pi}{360}$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Khi đó $\tan 29^0 30' \approx \tan\frac{\pi}{6} + \left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{6}}\right)\left(-\frac{\pi}{360}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{360.3} \approx 0{,}566.$

Bài 47.

a) Cho hàm số $f(x) = \tan x$. Tính $f^{(n)}(x)$ với $n = 1, 2, 3$.

b) Chứng minh rằng nếu $f(x) = \sin^2 x$ thì $f^{(4n)}(x) = -2^{4n-1}.\cos 2x$

Giải

a) $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$f''(x) = -\frac{2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2\cos^4 x - 2\sin x.3\cos^2 x(-\sin x)}{\cos^6 x} = \frac{2 + 4\sin^2 x}{\cos^4 x}.$$

b) $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

Ta có:

$f'(x) = \sin 2x; f''(x) = 2\cos 2x, f'''(x) = -2^2 \sin 2x, f^{(4)}(x) = -2^3 \cos 2x$

Dùng phương pháp qui nạp ta sẽ chứng minh:

$f^{(4n)}(x) = -2^{4n-1}.\cos 2x$, $\forall n \geq 1$ (*)

- $n = 1 \Rightarrow f^{(4)}(x) = -2^{4-1}.\cos 2x = -2^3 \cos 2x$ (đúng)
- $n = k \Rightarrow f^{(4k)}(x) = -2^{4k-1}.\cos 2x$. Ta chứng minh (*) đúng với $n=k+1$.

Thật vậy.

$$f^{(4k+4)}(x) = \left[f^{(4k)}(x)\right]^{(4)} = \left(-2^{4k-1}.\cos 2x\right)^{(4)} = -2^{4k-1}.(\cos 2x)^{(4)}$$

$$= -2^{4k-1}.\left(2^4 \cos 2x\right) = -2^{4(k+1)-1}.\cos 2x$$

Bài 48. Chứng minh rằng:

a) Nếu $y = A\sin(\omega t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi)$ trong đó A, B, ω, φ và γ là những hằng số, thì $y'' + \omega^2 y = 0$

b) Nếu $y = \sqrt{2x - x^2}$ thì $y^3 y'' + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $y = A\sin(\omega t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow y' = A\omega\cos(\omega t + \varphi) - B\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$y'' = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) - B\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$

Từ đó suy ra $y'' + \omega^2 y = 0$

b) $y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow y' = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$

$$y'' = \frac{-\sqrt{2x - x^2} - (1 - x)\frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}}{2x - x^2} = -\frac{1}{(2x - x^2)\left(\sqrt{2x - x^2}\right)}$$

Khi đó $y^3.y'' + 1 = 0$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Vi phân của hàm số $y = \cos^2 x$ là:

(A) $dy = \sin x$; (B) $dy = -\sin 2x dx$;

(C) $dy = 2\cos x dx$; (D) $dy = -\cos 2x dx$.

2. Cho hàm số $f(x) = \frac{4}{3}x^6 + 5x^3 + 4x + 8$; $f'''(-1)$ là:

(A) –130 ; (B) 130; (C) 190 ; (D) –160.

3. Cho hàm số $y = \cos x$; $y^{(n)}(x)$ là:

(A) $\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$; (B) $\cos(x + n\pi)$;

(C) $\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$; (D) $(-1)^n \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)$.

4. Cho hàm số $f(x) = (x - 10)^7$, $f^{(8)}(x)$ là:

(A) 700 ; (B) −700 ; (C) 70 ; (D) 0.

5. Cho hàm số $y = \sin x$; $y^{(1000)}(x)$ là:

(A) sin x ; (B) −sinx ; (C) cosx ; (D) −cosx.

IV. ĐÁP ÁN

Câu hỏi	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(A)	(C)	(D)	(A)

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG V

Bài 49. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \sqrt{2x} + 1$; b) $y = \frac{x^2 + 3x - a^2}{x - 1}$ (a là hằng số);

c) $y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$; d) $y = \tan^2 x + \tan x^2$.

Giải

a) $y' = 2x^3 + 5x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

b) $y' = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2 + 3x - a^2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + a^2 - 3}{(x-1)^2}$.

c) $y' = (-2x)\cos x + (2 - x^2)(-\sin x) + 2\sin x + 2x\cos x = x^2 \sin x$.

d) $y' = 2\tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) + \frac{2x}{\cos^2 x^2} = 2.\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2x}{\cos^2 x^2} = 2\left(\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{x}{\cos^2 x^2}\right)$.

Bài 50.

a) Chứng minh rằng $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$ trong đó $x \in \mathbb{N}^*$

b) Với $x \neq 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$, ta đặt $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Từ đó hãy so sánh đẳng thức trong câu a) với công thức $(x^n)' = nx^{n-1}$ và nêu nhận xét.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{\left(x^n\right)'}{x^{2n}} = -\frac{n.x^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$ $(x \in \mathbb{N}^*)$

b) Nếu viết $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ thì $\left(x^{-n}\right)' = -n\frac{1}{x^{n+1}} = -n\left(x^{-n-1}\right)$

Từ đó ta có nhận xét:

Công thức $\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\forall \alpha \in Z^*$.

Bài 51. Tìm đạo hàm đến cấp được nêu kèm theo của các hàm số sau $(n \in \mathbb{N}^*)$.

a) $y = \sin x,\ y'''$; b) $y = \sin x.\sin 5x,\ y^{(4)}$;

c) $y = (4-x)^5,\ y^{(n)}$; d) $y = \frac{1}{2+x},\ y^{(n)}$;

e) $y = \frac{1}{2x+1},\ y^{(n)}$; f) $y = \cos^2 x,\ y^{(2n)}$.

Hướng dẫn giải

a) $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x,\ y'' = -\sin x,\ y''' = -\cos x$.

b) $y = \sin x.\sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 6x)$

Do đó $y' = \frac{1}{2}(-4\sin 4x + 6\sin 6x) = -2\sin 4x + 3\sin 6x$

$y'' = -8\cos 4x + 18\cos 6x;\ y''' = 32\sin 4x - 108\sin 6x;$

$y'''' = 128\cos 4x - 648\cos 6x.$

c) $y = (4-x)^5 \Rightarrow y' = -5(4-x)^4$

$y'' = 20(4-x)^3;\ y''' = -60(4-x)^2;\ y^{(4)} = 120(4-x)$

$y^{(5)} = -120;\ y^{(n)} = 0\ (n \geq 6)$

d) $y = \frac{1}{2+x}$

$$y' = \frac{(-1).1}{(2+x)^2};\ y'' = \frac{1.2}{(2+x)^3};\ y''' = \frac{-1.2.3}{(2+x)^4}\ \ldots\ldots,\ y^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{(2+x)^{1+n}}.$$

Chứng minh $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{(2+x)^{1+n}}$ bằng phương pháp qui nạp.

e) $y = \frac{1}{2x+1} \Rightarrow y' = \frac{-2}{(2x+1)^2};\ y'' = \frac{1.2.2^2}{(2x+1)^3}\ \ldots..;\ y^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!.2^n}{(2x+1)^{n+1}}$

Chứng minh $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n .n!.2^n}{(2x-1)^{n+1}}$ bằng phương pháp qui nạp.

f) $y = \cos^2 x$

$y' = 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x; y'' = -2\cos 2x; y''' = 4\sin 2x$

$y^{(4)} = 8\cos 2x \ldots\ldots y^{(2n)} = (-1)^n 2^{2n-1}.\cos 2x.$

Chứng minh $y^{(2n)} = (-1)^n 2^{2n-1}.\cos 2x$ bằng phương pháp qui nạp

Bài 52. Tính vi phân của hàm số $y = \dfrac{1}{(1+\tan x)^2}$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{6}$ ứng với $\Delta x = \dfrac{\pi}{360}$ (tính chính xác đến hàng phần vạn)

Giải

Áp dụng công thức $df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$

Ta có: $y = \dfrac{1}{(1+\tan x)^2} \Rightarrow y' = -\dfrac{2(1+\tan x)\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)}{(1+\tan x)^4} = -\dfrac{2(1+\tan^2 x)}{(1+\tan x)^3}$

$$y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-2\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\left(1+\tan\frac{\pi}{6}\right)^3} = \frac{-2\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3} = -\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+5}.$$

Do đó $df\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+5}.\dfrac{\pi}{360} \approx -0,0059.$

Bài 53. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) Biết tung độ của tiếp điểm bằng 2 ;

b) Biết rằng tiếp tuyến song song với trục hoành ;

c) Biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{8}x + 3$;

d) Biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm A(0; 6).

Giải

a) Khi $y_0 = 2$ thì $x_0^4 + 2x_0^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0^2 = 1 \\ x_0^2 = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$

Ta có: $y' = 4x^3 + 4x$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm (1; 2) là:

$y = y'(1)(x-1) + 2 = 8(x-1) + 2 = 8x - 6$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm (–1 ; 2) là:

$y = y'(-1)(x+1) + 2 = -8(x+1) + 2 = -8x - 6$

b) Do tiếp tuyến song song với trục hoành nên $y'(x_0) = 0$

tức $4x_0^3 + 4x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm có dạng:

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = 0(x - 0) - 1$ hay $y = -1$.

c) Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{8}x + 3$ nên:

$$y'(x_0).\left(-\frac{1}{8}\right) = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = 8$$

Do đó $4x_0^3 + 4x_0 = 8 \Leftrightarrow x_0^3 + x_0 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = x_0^4 + 2x_0^2 - 1 = 2$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm có dạng:

$$y = 8(x - 1) + 2 = 8x - 6.$$

d). Gọi phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(x_0 ; y_0) \in (C)$ là:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = \left(4x_0^3 + 4x_0\right)(x - x_0) + x_0^4 + 2x_0^2 - 1$$

Do tiếp tuyến đi qua A(0; –6) nên:

$$-6 = \left(4x_0^3 + 4x_0\right)(0 - x_0) + x_0^4 + 2x_0^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow -4x_0^4 - 4x_0^2 + x_0^4 + 2x_0^2 - 1 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_0^4 + 2x_0^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0^2 = 1 \\ x_0^2 = -\frac{5}{3} \quad (\text{ loại }) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$$

Khi $x_0 = 1$, tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = \left(4.1^3 + 4.1\right)(x - 1) + 1^4 + 2.1^2 - 1 \text{ hay } y = 8(x - 1) + 2 = 8x - 6$$

Khi $x_0 = -1$, tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = -8(x + 1) + 2 = -8x - 6$$

Bài 54. Tìm một điểm trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x - 1}$ sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

Giải

$$y = \frac{1}{x - 1} \Rightarrow y' = -\frac{1}{(x - 1)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến (Δ) của đồ thị hàm số tại điểm $\left(x_0; \frac{1}{x_0 - 1}\right)$ là:

$$y = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{1}{x_0 - 1} = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}x + \frac{2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2} \;;\; (x_0 \neq 1)$$

Ta có: (Δ) cắt trục hoành tại điểm $A(2x_0 - 1; 0)$

(Δ) cắt trục hoành tại điểm $B\left(0; \dfrac{2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2}\right)$.

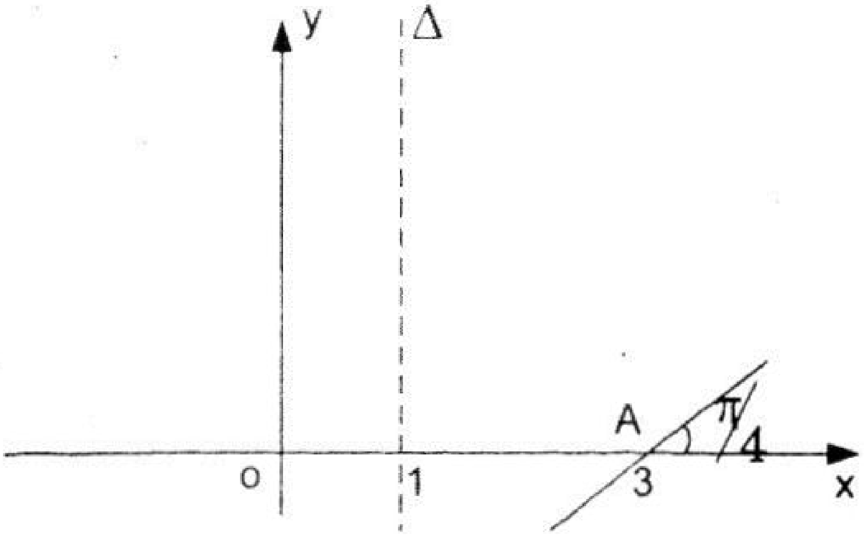
$S_{\Delta AOB} = 2$ khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{2}|2x_0 - 1|.\left|\frac{2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2}\right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x_0 - 1}{x_0 - 1} = 2 \text{ (vô nghiệm)} \\ \dfrac{2x_0 - 1}{x_0 - 1} = -2 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{3}{4} \end{array}\right. \Rightarrow y_0 = \frac{1}{\frac{3}{4} - 1} = -4.$$

Vậy điểm cần tìm là $\left(\dfrac{3}{4}; -4\right)$.

Bài 55. Đồ thị (P) của một hàm số bậc hai y = P(x) đã bị **xoá** đi, chỉ còn lại trục đối xứng Δ, điểm A thuộc (P) và tiếp tuyến tại A của (P). Hãy tìm P(x) và vẽ lại đồ thị (P)



Hướng dẫn giải

Gọi phương trình của (P): $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

– Trục đối xứng Δ : x = 1 hay $\dfrac{-b}{2a} = 1 \Leftrightarrow b = -2a$. (1)

- Điểm A(3 ; 0) ∈ (P) nên: $9a + 3b + c = 0$ (2)
- Do tiếp tuyến tại A của (P) tạo với trục Ox một góc $\dfrac{\pi}{4}$ nên:

$$y'(3) = \text{tg}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 6a + b = 1 \text{ (3)}.$$

Từ (1), (2) và (3) ta có:

$$\begin{cases} b = -2a \\ 9a + 3b + c = 0 \\ 6a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy phương trình cần tìm là:

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

- Vẽ lại đồ thị (P) : Học sinh tự làm

Bài 56. Cho parabol (P): $y = x^2$. Gọi M_1, M_2 là hai điểm thuộc (P), lần lượt có hoành độ là $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$. Hãy tìm trên (P) một điểm C sao cho tiếp tuyến tại C song song với cát tuyến M_1M_2. Viết phương trình của tiếp tuyến đó.

Giải

Khi $x_1 = -2 \Rightarrow y_1 = 4$. Do đó $M_1(-2 ; 4)$;

Khi $x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1$. Do đó $M_2(1; 1)$;

- Cát tuyến M_1M_2 có hệ số góc là : $k_{M_1M_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1 - 4}{1 - (-2)} = -1$
- $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$. Tiếp tuyến của (P) tại điểm $(x_0; x_0^2) \in (P)$ có dạng: $y = (2x_0)(x - x_0) + x_0^2 = 2x_0x - x_0^2$.

Để tiếp tuyến cần tìm song song với cát tuyến M_1M_2 thì:

$$y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow 2x_0 = -1 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{2}.$$

Vậy tiếp tuyến có dạng: $y = 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)x - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$

hay $y = -x - \dfrac{1}{4}$ (chú ý rằng M_1 không nằm trên tiếp tuyến).

Bài 57. Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$, ở đó $t > 0$, t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m).

a) Tính vận tốc tại thời điểm $t = 2$;

b) Tính gia tốc tại thời điểm $t = 3$;

c) Tính gia tốc tại thời điểm vận tốc bằng 0 ;

d) Tính vận tốc tại thời điểm gia tốc bằng 0.

Hướng dẫn giải

Ta có: $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$;

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t - 9;\ a(t) = s''(t) = 6t - 6.$$

a) $v(2) = 3.2^2 - 6.2 - 9 = -9$ m/s.

b) $a(3) = 6.3 - 6 = 12\ m/s^2$.

c) Khi $v(t) = 0$ tức $3t^2 - 6t - 9 = 0 <=> t = 3 => a(3) = 12\ m/s^2$.

d) Khi $a(t) = 0$ tức $6t - 6 = 0 <=> t = 1 => v(1) = 3 - 6 - 9 = -12\ m/s$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Bài 58. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi điểm mà nó xác định.

b) Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi điểm mà nó xác định.

c) Hàm số $y = |x|$ có đạo hàm tại mọi điểm mà nó xác định.

Giải

a) Đúng

b) Sai vì hàm số $y = \sqrt{x}$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

c) Sai vì hàm số $y = |x|$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$ nhưng nó không có đạo hàm tại $x = 0$

Bài 59. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4}{x-1}$ tại điểm với hoành độ $x = -1$ có phương trình là:

(A) $y = -x - 3$; (B) $y = -x + 2$; (C) $y = x - 1$; (D) $y = x + 2$.

Giải

$$y = \frac{4}{x-1} \Rightarrow y' = -\frac{4}{(x-1)^2}$$

Khi $x = -1 => y = -2$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = y'(-1)(x+1) - 2 = -(x+1) - 2 = -x - 3$$

Đáp án (A).

Bài 60. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ tại điểm với hoành độ $x = \dfrac{1}{2}$ có phương trình là:

(A) $2x - 2y = -1$; (B) $2x - 2y = 1$; (C) $2x + 2y = 3$; (D) $2x + 2y = -3$.

Giải

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = y'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 = -x + \frac{3}{2}$$

hay $2y + 2x = 3$

Đáp án (C).

Bài 61. Hàm số có đạo hàm bằng $2x + \frac{1}{x^2}$ là:

(A) $y = \frac{x^3 + 1}{x}$; (B) $y = \frac{x^3 + 5x - 1}{x}$;

(C) $y = \frac{3(x^2 + x)}{x^3}$; (D) $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x}$.

Giải

Đáp án (B)

Vì $y = \frac{x^3 + 5x - 1}{x} = x^2 + 5 - \frac{1}{x}$ nên $y' = 2x + \frac{1}{x^2}$.

Bài 62. Đạo hàm cấp 2010 của hàm số y = cosx là:

(A) sinx ; (B) –sinx ; (C) cosx ; (D) –cosx

Giải

$y = \cos x \Rightarrow y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Do đó $y^{(2010)} = \cos\left(x + 2010.\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x + 1005\pi) = -\cos x$.

Đáp án: (D)

Bài 63. Điền nội dung thích hợp vào chỗ trống.

a) Hàm số hợp của hàm số y = cotu và hàm số trung gian $u = \sqrt{x}$ là y=....

b) Hàm số hợp của hàm số $y = u^n$ và hàm số trung gian u = cosx + sinx là y = ...

c) Hàm số y = tan3x là hàm hợp của hàm số y = ... và hàm số trung gian u = ...

d) Hàm số $y = \sqrt{\cos x}$ là hàm số hợp của hàm số y = ...và hàm số trung gian u = ...

Giải

a) $y = \cot\sqrt{x}$; b) $y = (\cos x + \sin x)^n$;

c) y = tanu và u = 3x; d) $y = \sqrt{u}$ và u = cosx.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

Bài 1. a) Tính $\sin\frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{\pi}{8}$.

b) Chứng minh rằng có hằng số C > 0 để có đẳng thức:

$$\sin x + (\sqrt{2} - 1).\cos x = C.\cos x\left(x - \frac{3\pi}{8}\right), \text{ với mọi } x.$$

Giải

a) Ta có: * $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)$.

$$=> \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} > 0.$$

$$* \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

$$=> \cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} > 0.$$

b) $A = \sin x + \left(\sqrt{2} - 1\right).\cos x$

$$A = \sqrt{1 - \left(\sqrt{2} - 1\right)^2}.\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\sqrt{2} - 1\right)^2}}.\sin x + \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{1 + \left(\sqrt{2} - 1\right)^2}}.\cos x\right)$$

$$A = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.\sin x + \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.\cos x\right)$$

$$A = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\left(\sin x.\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}.\cos x\right)$$, theo câu a).

$$A = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right); \qquad A = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.\cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right).$$

Vậy $\sin x + \left(\sqrt{2} - 1\right).\cos x = C.\cos x\left(x - \frac{3\pi}{8}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = C.\cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow C = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} > 0$$

Bài 2 Giải phương trình tanx = cot2x.

Biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác.

Giải

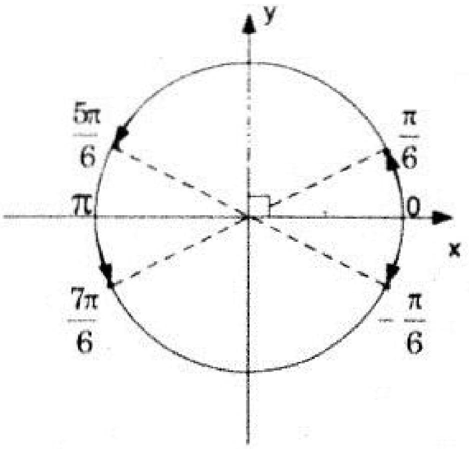
Ta có: $\tan x = \cot 2x \Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x.\cos x - \sin 2x.\sin x = 0.$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Do $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases}$ nên $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là các nghiệm của phương trình.

- Biểu diễn nghiệm:



Bài 3.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P(x) = (\sin x + \cos x)^3$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $R(x) = P(x) + Q(x)$.

Giải

a) Ta có: $P(x) = (\sin x + \cos x)^3 = \left[\sqrt{2}.\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right]^3 = 2\sqrt{2}.\sin^3\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

$\Rightarrow P(x) \geq -2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \text{Min}\,P(x) = -2\sqrt{2}$ khi $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi\ , k \in \mathbb{Z}$.

b) $Q(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x} = \dfrac{4}{\sin^2 2x} \geq 4$

$\Rightarrow \text{Min}\,Q(x) = 4 \Leftrightarrow$ khi $\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

c) Theo a) và b) ta có:

$R(x)=P(x)+Q(x) \geq 4 - 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \text{Min}\,R(x) = 4 - 2\sqrt{2}$ khi $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ và $x = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ đồng thời xảy ra, tức $x = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $\text{Min}\,R(x) = 4 - 2\sqrt{2}$ khi $x = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 4. Giải các phương trình:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4}$; b) $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2 \dfrac{\pi}{4}$;

c) $\cos x.\cos 2x = \cos 3x$; d) $\tan 2x - \sin 2x + \cos 2x - 1 = 0$.

Giải

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2.\sin^2 x.\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x.\cos^2 x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 2x = \dfrac{1}{2}.$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 4x}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$

b) $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left(1-\cos^2 2x\right) - \dfrac{1-\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos 2x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

c) $\cos x.\cos 2x = \cos 3x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\cos 3x + \cos x\right) = \cos 3x$

$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x = x + k2\pi\\ 3x = -x + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ (do $x = k\pi$ chứa trong $x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$).

d) Điều kiện $\cos 2x \neq 0$ (*)

$\tan 2x - \sin 2x + \cos 2x - 1 = 0.$

$\Leftrightarrow \sin 2x\left(1 - \cos 2x\right) + \cos 2x\left(\cos 2x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\cos 2x - 1\right)\left(\cos 2x - \sin 2x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1\\ \cos 2x = \sin 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = k2\pi\\ \tan 2x = 1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ 2x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right., k \in \mathbb{Z},$$ **thỏa mãn điều kiện (*).**

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $2\sin\left(x + 10^0\right) - \sqrt{12}.\cos\left(x + 10^0\right) = 3$

b) $\sqrt{3}.\cos 5x + \sin 5x = 2.\cos 3x$;

c) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0.$

Giải

a) $A = 2\sin\left(x + 10^0\right) - \sqrt{12}.\cos\left(x + 10^0\right)$

$$A = 4\left[\frac{1}{2}\sin\left(10^0 + x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\left(x + 10^0\right)\right]$$

$$A = 4.\left[\sin 30^0.\sin\left(x + 10^0\right) - \cos 30^0.\cos\left(x + 10^0\right)\right]$$

$$A = -4.\cos\left(x + 40^0\right)$$

- $2\sin\left(x + 10^0\right) - \sqrt{12}.\cos\left(x + 10^0\right) = 3$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + 40^0\right) = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos\left(x + 40^0\right) = \cos\alpha$, với $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$.

$\Leftrightarrow x + 40^0 = \pm\alpha + k360^0 \Leftrightarrow x = \pm\alpha - 40^0 + k360^0, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\sqrt{3}.\cos 5x + \sin 5x = 2.\cos 3x$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos 5x + \frac{1}{2}.\sin 5x = \cos 3x$

$\Leftrightarrow \cos 5x.\cos\frac{\pi}{6} + \sin 5x.\sin\frac{\pi}{6} = \cos 3x \Leftrightarrow \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 3x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - \frac{\pi}{6} = 3x + k2\pi \\ 5x - \frac{\pi}{6} = -3x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

c) Với $\cos x = 0$, thay vào phương trình ta được: $1 = 0$, vô lý.

Do đó $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$, ta được:

$$\tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan 2 + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $2\tan^2 x + 3 = \frac{3}{\cos x}$; b) $\tan^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$;

c) $\tan x + \tan 2x = \frac{\sin 3x}{\cos x}$.

Giải

a) Điều kiện: $\cos x \neq 0$ (*)

$$2\tan^2 x + 3 = \frac{3}{\cos x} \Leftrightarrow 2\left(\tan^2 x + 1\right) + 1 = \frac{3}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\cos^2 x} + 1 = \frac{3}{\cos x}$$

Đặt $t = \dfrac{1}{\cos x}$, ta được: $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

- Với $t = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Với $t = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = 2 > 1$ (vô nghiệm).

Vậy $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là các nghiệm của phương trình.

b)

- Điều kiện $\begin{cases} 1 + \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \ (*)$

$$\tan^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$$

- $\Leftrightarrow (1 + \cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \sin x = \cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ \tan x = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + +k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}, \text{ thỏa mãn điều kiện } (*)$$

c)

- Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} (*)$

$$\tan x + \tan 2x = \frac{\sin 3x}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x.\cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos x}$$

- $\Leftrightarrow \sin 3x(1 - \cos 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = k\pi \\ 2x = k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{3} \\ x = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \text{ (do } x = k\pi \text{ chứa trong } x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\text{).}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 7. Một đoàn tàu nhỏ có 3 toa khách đỗ ở sân ga.Có 3 hành khách bước lên tàu.Hỏi:

a) Có bao nhiêu khả năng trong đó 3 hành khách lên 3 toa khác nhau?

b) Có bao nhiêu khả năng trong đó 2 hành khách cùng lên một toa còn hành khách còn lại lên toa khác?

Giải

a) $P_3 = 3! = 6$ khả năng 3 hành khách lên 3 toa khác nhau.

b) Có $C_3^2 = 3$ khả năng 2 hành khách lên cùng một toa.

Trong mỗi khả năng trên có $A_3^2 = 6$ khả năng 2 hành khách lên cùng một toa và hành khách thứ 3 lên một toa khác.

=> Có $C_3^2.A_3^2 = 18$ khả năng.

Bài 8. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ với $n \in N^*, n > 1$. Hỏi có bao nhiêu cặp $(x ; y)$ với $x \in A, y \in A$ và $x > y$.

Giải

Có $A_n^2 = n(n-1)$ cặp $(x; y)$ $x, y \in A$ mà $x \neq y$.

=> có $\dfrac{A_n^2}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ cặp $(x ; y)$, $x, y \in A$ mà $x > y$.

Bài 9. Một túi đựng 16 viên bi, trong đó có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen và 3 viên bi đỏ.

a) Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong túi

+ Tính xác suất để lấy được 2 viên bi đen.

+ Tính xác suất để lấy được 1 viên bi đen và 2 viên bi trắng.

b) Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong túi.

+ Tính xác suất để lấy được 3 viên bi đỏ.

+ Tính xác suất để lấy được 3 viên bi với 3 màu khác nhau

Giải

a) Lấy 2 viên bi trong 16 viên bi nên ta có không gian mẫu có:

$$|\Omega| = C_{16}^2 = 120$$

- Gọi A là biến cố: "Lấy được 2 viên bi đen"

Khi đó: $|\Omega_A| = C_6^2 = 15 \Rightarrow P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{15}{120} = \dfrac{1}{8}$.

- Gọi B là biến cố: " Lấy được 1 viên bi đen và 1 viên bi trắng"

=> Ta suy ra $|\Omega_B| = C_6^1.C_7^1 = 42 \Rightarrow P(B) = \dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \dfrac{42}{120} = \dfrac{7}{20}$

b) Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi trong 16 viên bi nên ta có không gian mẫu có $|\Omega| = C_{16}^3 = 560$

- Gọi C là biến cố: "Lấy được 3 viên bi đỏ"

=> $|\Omega_C| = C_3^3 = 1 \Rightarrow P(C) = \dfrac{|\Omega_C|}{|\Omega|} = \dfrac{1}{560}$.

- Gọi D là biến cố : "Lấy được 3 viên bi với 3 màu khác nhau"

=> Số phần tử của D: $\Omega_D = C_7^1.C_6^1.C_3^1 = 7.6.3 = 126$ (phần tử).

$\Rightarrow P(D) = \dfrac{|\Omega_D|}{|\Omega|} = \dfrac{126}{560} = \dfrac{9}{40}$.

Bài 10. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số điểm mà một vận động viên bắn cung nhận được khi bắn một lần. Giả sử X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	9	7	5	3	1
P	0,2	0,36	0,23	0,14	0,07

a) Tính điểm trung bình khi vận động viên bắn một lần.

b) Tính điểm trung bình khi vận động viên bắn 48 lần.

Giải

a) Áp dụng công thức: $E(X) = E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$

=> Điểm trung bình khi vận động viên bắn một lần là:

$E(X) = 9.0,2 + 7.0,36 + 5.0,23 + 3.0,14 + 1.0,07$

$E(X) = 5,96$.

b) Điểm trung bình khi vận động viên bắn 48 lần là:

$48.E(X) = 48.5,96 = 286,08$.

Bài 11. Ta đã biết $\cos\frac{\pi}{2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

a) $\cos\frac{\pi}{2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

b) $\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-1\text{dấu căn}}$,với mọi số nguyên dương $n \geq 2$

Giải

a) $\cos\frac{\pi}{2^3} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2^2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{2^3} = \frac{1}{2}.\sqrt{2+\sqrt{2}}.$

b) Chứng minh $\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-1\text{dấu căn}}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ (1)

Khi n = 2 ta có $\cos\frac{\pi}{2^2} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.\sqrt{2}$ luôn đúng.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*$, tức là:

$$\cos\frac{\pi}{2^k} = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{k-1\text{dấu căn}}$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.\left(1+\cos\frac{\pi}{2^k}\right) = \frac{1}{4}\left(2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{k-1\text{dấu căn}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}}_{k\text{dấu căn}}, \forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*.$$

=> (1) đúng với $n = k+1 \geq 3, k \in \mathbb{N}^*$.

Bài 12. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 3 \text{ và } u_n = 4u_{n-1} - 1, \text{với mọi } n \geq 2.$$

Chứng minh rằng:

a) $u_n = \dfrac{2^{2n+1}+1}{3}$, với mọi số nguyên $n \geq 1$.

b) (u_n) là dãy số tăng.

Giải

a) Chứng minh: $u_n = \dfrac{2^{2n+1}+1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (*)

Khi $n = 1$, $u_1 = \dfrac{2^3+1}{3} = 3$, (*) đúng.

Giả sử (*) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ta có: $u_k = \dfrac{2^{2k+1}+1}{3}$.

$$\Rightarrow u_{k+1} = 4.u_k - 1 = 2^2.\frac{2^{2k+1}+1}{3} - 1 = \frac{2^{2k+3}+1}{3}$$

=> (*) cũng đúng khi $n = k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$

b) $\forall n \geq 2, u_n = \dfrac{2^{2n+1}+1}{3}, u_{n-1} = \dfrac{2^{2n-1}+1}{3}$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2, \dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{2^{2n+1}+1}{2^{2n-1}+1} > 1$ do $2^{2n+1} > 2^{2n-1}$.

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n > u_{n-1}$.

$\Leftrightarrow$ Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Bài 13. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 5 \text{ và } u_n = u_{n-1} - 2, \text{ mọi } n \geq 2$$

a) Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) ;

b) Tìm tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n).

Giải

a) Ta có: $u_1 = 5, u_2 = u_1 - 2 = 5 - 2$

$$u_3 = u_2 - 2 = 5 - 2 - 2 = 5 - 2.2$$

$$u_4 = u_3 - 2 = 5 - 2.2 - 2 = 5 - 3.2$$

....

$$u_n = 5 - (n-1)2 = 7 - 2n$$

$\Rightarrow u_n = 7 - 2n, n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, khi $n = 1$ => $u_1 = 5$ đúng.

Giả sử $u_k = 7 - 2k, k \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$u_{k+1} = u_k - 2 = 7 - 2k - 2 = 7 - 2(k+1), k \in \mathbb{N}^*$$

=> Số hạng u_n đúng với $n = k + 1$.

Vậy $u_n = 7 - 2n, n \in \mathbb{N}^*$

b) $\forall n \geq 2, u_n = 7 - 2n, u_{n-1} = 7 - (n-1).2 = 9 - 2n$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n - u_{n-1} = -2 \Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} - 2$

$\Leftrightarrow (u_n)$ là một cấp số cộng với công sai $d = -2$ và $u_1 = 5$.

Áp dụng công thức $S_n = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1).d\right]$

$$\Rightarrow S_{100} = \frac{100}{2}.\left[2.5 + (100-1)(-2)\right]$$

$$S_{100} = -9400.$$

Bài 14. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$u_1 = 2$ và $u_n = 3.u_{n-1}$, với mọi $n \geq 2$

a) Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) ;

b) Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n).

Giải

a) Ta có: $u_1 = 2, u_2 = 3.u_1 = 3.2$

$$u_3 = 3.u_2 = 3^2.2$$

$$u_4 = 3.u_3 = 3^3.2$$

....

$$u_n = 3.u_{n-1} = 3^{n-1}.2$$

$\Rightarrow u_n = 2.3^{n-1}, \forall n \geq 1$. Thật vậy:

Khi $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2.3^0 = 2$ luôn đúng.

Giả sử $u_k = 2.3^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$u_{k+1} = 3.u_k = 2.3^k, k \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow u_n$ đúng với $n = k + 1$. Vậy $u_n = 2.3^{n-1}, n \geq 1$

b) Ta có: $\forall n \geq 2, u_n = u_{n-1}.3$

$\Leftrightarrow (u_n)$ là một cấp số nhân với công bội $q = 3$, số hạng $u_1 = 2$.

Áp dụng công thức $S_n = u_1.\frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow S_{10} = 2.\frac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 3^{10} - 1$

Bài 15. Các số $x - y$, $x + y$ và $3x - 3y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và đồng thời các số $x - 2$, $y + 2$ và $2x + 3y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Hãy tìm x và y.

Giải

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} (x - y) + (3x - 3y) = 2(x + y) \\ (2x + 3y)(x - 2) = (y + 2)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 13y^2 - 11y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\dfrac{2}{13}. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = -\dfrac{6}{13} \\ y = -\dfrac{2}{13} \end{cases}$$

Vậy $(x ; y) = (3 ; 1)$ và $(x ; y) = \left(-\dfrac{6}{13} ; -\dfrac{2}{13}\right)$.

Bài 16. Tính giới hạn của các dãy số sau:

a) $\lim \dfrac{n^4 - 10n^3 + 15n - 7}{n^4 + n + 100}$; b) $\lim \dfrac{2n^3 + 35n^2 - 10n + 3}{5n^5 - n^3 + 2n}$;

c) $\lim \dfrac{\sqrt{6n^4 + n + 1}}{2n + 1}$; d) $\lim \dfrac{3.2^n - 8.7^n}{4.3^n + 5.7^n}$.

Giải

a) $$\lim \frac{n^4 - 10n^3 + 15n - 7}{n^4 + n + 100} = \lim \frac{1 - \dfrac{10}{n} + \dfrac{15}{n^3} - \dfrac{7}{n^4}}{1 + \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{100}{n^4}} = 1$$

b) $$\lim \frac{2n^3 + 35n^2 - 10n + 3}{5n^5 - n^3 + 2n} = \lim \frac{\dfrac{2}{n^2} + \dfrac{35}{n^3} - \dfrac{10}{n^4} + \dfrac{3}{n^5}}{5 - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^4}} = \frac{0}{5} = 0$$

c) $$\lim \frac{\sqrt{6n^4 + n + 1}}{2n + 1} = \lim \frac{n^2\sqrt{6 + \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n^4}}}{2n + 1} = \lim \frac{\sqrt{6 + \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n^4}}}{\dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}} = +\infty$$

(vì $\lim \sqrt{6 + \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n^4}} = \sqrt{6} > 0$; $\lim \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2} = 0$ và $\dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2} > 0$)

d) $$\lim \frac{3.2^n - 8.7^n}{4.3^n + 5.7^n} = \lim \frac{3.\left(\dfrac{2}{7}\right)^n - 8}{4.\left(\dfrac{3}{7}\right)^n + 5} = -\frac{8}{5}.$$

Bài 17. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \sqrt{3n^4 - 10n + 12}$; b) $\lim \left(2.3^n - 5.4^n\right)$;

c) $\lim \left(\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2\right)$; d) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n}$.

Giải

a) $$\lim \sqrt{3n^4 - 10n + 12} = \lim \sqrt{n^4\left(3 - \frac{10}{n^3} + \frac{12}{n^4}\right)} = \lim n^2\sqrt{3 - \frac{10}{n^3} + \frac{12}{n^4}} = +\infty$$

(vì $\lim\sqrt{3-\frac{10}{n^3}+\frac{12}{n^4}}=\sqrt{3}>0; \lim n^2=+\infty$)

b) $\lim\left(2.3^n-5.4^n\right)=\lim 4^n\left(2.\left(\frac{3}{4}\right)^n-5\right)=-\infty$

(vì $\lim 4^n=+\infty, \lim\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n-5\right)=-5<0$).

c) $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2\right)}{\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2}$

$$=\lim\frac{n^2+1}{\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2}=\lim\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+1}=\frac{1}{2}.$$

d) $\lim\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}$

$$=\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{2n}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2}=1.$$

Bài 18. Tìm số hạng đầu và công bội của một cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng số hạng thứ hai là $\frac{12}{5}$ và tổng của cấp số nhân này là 15.

Hướng dẫn giải

Ta có $\begin{cases}u_2=u_1.q\\ s=\dfrac{u_1}{1-q}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1.q=\dfrac{12}{5}\\ \dfrac{u_1}{1-q}=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=15(1-q)\\ 15q(1-q)=\dfrac{12}{5}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=15(1-q)\\ q=\dfrac{1}{5}\text{ hoặc } q=\dfrac{4}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}q=\dfrac{1}{5}\\ u_1=12\end{cases}\\ \begin{cases}q=\dfrac{4}{5}\\ u_1=3\end{cases}\end{array}\right.$$

Bài 19. Tìm giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+x+10}{x^3+6}$; e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{2x^4+4x^2+3}}{2x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+11x+30}{25-x^2}$; f) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+1)\sqrt{\frac{x+1}{2x^3+x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^6+4x^2+x-2}{\left(x^3+2\right)^2}$; g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+11x-100}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-40}{2x^5+7x^4+21}$; h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{5x^2+1}-x\sqrt{5}\right)$;

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2+x+10}{x^3+6} = \dfrac{(-1)^2-1+10}{(-1)^3+6} = \dfrac{10}{5} = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to-5} \dfrac{x^2+11x+30}{25-x^2} = \lim\limits_{x\to-5} \dfrac{(x+5)(x+6)}{(5-x)(5+x)} = \lim\limits_{x\to-5} \dfrac{x+6}{5-x} = \dfrac{-5+6}{5-(-5)} = \dfrac{1}{10}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^6+4x^2+x-2}{\left(x^3+2\right)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}-\dfrac{2}{x^6}}{\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)^2} = 1$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-40}{2x^5+7x^4+21} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{40}{x^5}}{2+\dfrac{7}{x}+\dfrac{21}{x^5}} = \dfrac{0}{2} = 0$.

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^4+4x^2+3}}{2x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\sqrt{2+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}}}{2x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}}}{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1)\sqrt{\dfrac{x+1}{2x^3+x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{1}{x^2}}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+11x-100} = \lim\limits_{x\to+\infty} |x|\sqrt{9+\dfrac{11}{x}-\dfrac{100}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{9+\dfrac{11}{x}-\dfrac{100}{x^2}} = +\infty$

(vì $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9+\dfrac{11}{x^2}-\dfrac{100}{x^2}} = \sqrt{9} > 0$)

h) $\lim\left(\sqrt{5x^2+1}-x\sqrt{5}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+1-x^2.5}{\sqrt{5x^2+1}+x\sqrt{5}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{5x^2+1}+x\sqrt{5}} = 0.$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}{1+\dfrac{1}{x}} = 2.$

Bài 20. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm.

Giải

Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right) = -\infty$ => tồn tại $x_1 \in (-\infty; 0)$ để $f(x_1) < 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right) = +\infty$ => tồn tại $x_2 \in (0; +\infty)$ để $f(x_2) > 0$

Vậy phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(x_1; x_2)$.

Bài 21. Tìm đạo hàm của hàm số sau:

a) $y = \dfrac{ax^3 + bx^2 + c}{(a+b)x}$; (a, b, c là các hằng số).

b) $y = \left(x^3 - \dfrac{1}{x^3} + 3\right)^4$; c) $y = x^3\cos^2 x$;

d) $y = \sin\sqrt{4 + x^2}$; e) $y = \sqrt{1 + \tan\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}$.

Giải

a) $$y' = \frac{(3ax^2 + 2bx)(a+b)x - (ax^3 + bx^2 + c)(a+b)}{(a+b)^2x^2}$$

$$= \frac{(a+b)(3ax^3 + 2bx^2 - ax^3 - bx^2 - c)}{(a+b)^2x^2}$$

$$= \frac{(a+b)(2ax^3 + bx^2 - c)}{(a+b)^2x^2} = \frac{2ax^3 + bx^2 - c}{(a+b)x^2}$$

b) $$y' = 4\left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\right)^3\left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\right)' = 4\left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\right)\left(3x^2 + \frac{3x^2}{x^6}\right)$$

$$= 4\left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\right)\left(3x^2 + \frac{3}{x^4}\right) = 12\left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)$$

c) $$y' = 3x^2.\cos^2 x + x^3.2\cos x(-\sin x)$$

$$= x^2\cos x(3\cos x - 2x\sin x)$$

d) $$y' = \left(\sqrt{4 + x^2}\right)'\cos\sqrt{4 + x^2} = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}}\cos\sqrt{4 + x^2}.$$

e) $y' = \dfrac{\left[1+\tan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right]'}{2\sqrt{1+\tan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}} = \dfrac{\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)'}{\cos^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}{2\sqrt{1+\tan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}} = \dfrac{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(1+\tan^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right)}{2\sqrt{1+\tan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}$

Bài 22. Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + x - 5$. Tìm m để :

a) y' bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất.

b) y' có hai nghiệm trái dấu.

c) y'>0 với mọi x.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 3mx^2 + 2x + 1$

a) Khi $y' = (ax+b)^2$ (trong đó $a \neq 0$) thì $3mx^2 + 2x + 1 = a^2x^2 + 2abx + b^2$

hay $\begin{cases} a^2 = 3m \\ 2ab = 2 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{1}{3}$.

b) y' có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow (3m).1 < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

c) $y' > 0 \;\; \forall x \;\Leftrightarrow 3mx^2 + 2x + 1 > 0 \;\; \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{3}$.

Bài 23. Giải phương trình sau:

a) $y' = 0$, với $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x + \sin x - 3$;

b) $y' = 0$ với $y = \sin 3x - 2\cos 3x - 3x + 4$.

Giải

a) $y' = \cos 2x + \cos x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \; (k \in \mathbb{Z})$.

b) $y' = 3\cos 3x + 6\sin 3x - 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3\cos 3x + 6\sin 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\sin 3x + \cos 3x = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}.\sin 3x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 3x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Đặt $\frac{2}{\sqrt{5}} = \cos\alpha;\ \frac{1}{\sqrt{5}} = \sin\alpha$

Khi đó $\sin(3x+\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \sin\alpha$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+\alpha = \alpha + k2\pi \\ 3x+\alpha = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k.\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} - \frac{2\alpha}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 24. Cho Hypebol (H) xác định bởi phương trình $y = \frac{1}{x}$.

a) Tìm phương trình tiếp tuyến (T) của (H) tại điểm A có hoành độ a (với $a \neq 0$).

b) Giả sử (T) cắt trục Ox tại điểm I và cắt trục Oy tại điểm J. Chứng minh rằng A là trung điểm của đoạn thẳng IJ. Từ đó, suy ra cách vẽ tiếp tuyến (T)

c) Chứng minh rằng diện tích tam giác OIJ không phụ thuộc vào vị trí của điểm A.

Hướng dẫn giải

a) $A\left(a;\frac{1}{a}\right) \in (H)$ trong đó $a \neq 0$, $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (H) tại A là:

$$y = y'(a)(x-a) + \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}.\ (T)$$

b) $$\left.\begin{array}{l} (T)\cap Ox \equiv I(2a;0) \\ (T)\cap Oy \equiv J\left(0;\frac{2}{a}\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_I + x_J = \frac{2a+0}{2} = a = x_A \\ y_I + y_J = \frac{0+\frac{2}{a}}{2} = \frac{1}{a} = y_A \end{array}\right.$$

Vậy A là trung điểm của IJ.

c) $S_{\Delta OIJ} = \frac{1}{2}OI.OJ = \frac{1}{2}.|2a|.\left|\frac{a}{2}\right| = 2$ (đvdt).

Bài 25. Một điểm M chuyển động trên parabol $y = -x^2 + 17x - 66$ theo hướng tăng của x. Một người quan sát đứng ở vị trí P(2 ; 0).

Hãy xác định các giá trị của hoành độ điểm M để người quan sát có thể nhìn thấy được điểm M.

Hướng dẫn giải

(P): $y = -x^2 + 17x - 66$; $y' = -2x + 17$

$M_0 \in (P)$ nên $M_0\left(x_0; -x_0^2 + 17x_0 - 66\right)$.

+ Phương trình tiếp tuyến kẻ từ P(2 ; 0) tới parabol là:

$$y = \left(-2x_0 + 17\right)\left(x - x_0\right) - x_0^2 + 17x_0 - 66$$

hay $0 = \left(-2x_0 + 17\right)\left(2 - x_0\right) - x_0^2 + 17x_0 - 66$

$\Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 - 32 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -4$ hoặc $x_0 = 8$.

Như vậy để người quan sát có thể nhìn thấy được điểm M thì $-4 \le x \le 8$.

MỤC LỤC

Lời nói đầu 3

Chương I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 5

- §1. Hàm số lượng giác 5
- §2. Phương trình lượng giác cơ bản 15
- §3. Một số dạng phương trình lượng giác đơn giản 27
- Câu hỏi và bài tập ôn tập chương I 43

Chương II. TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT 52

- §1. Hai quy tắc đếm cơ bản 52
- §2. Hoán vị. Chỉnh hợp và tổ hợp 54
- §3. Nhị thức Niu-tơn 60
- §4. Biến cố và xác suất của biến cố 64
- §5. Các quy tắc tính xác suất 70
- §6. Biến ngẫu nhiên rời rạc 77
- Câu hỏi và bài tập ôn tập chương II 83

Chương III. DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN 92

- §1. Phương pháp quy nạp toán học 92
- §2. Dãy số 97
- §3. Cấp số cộng 103
- §4. Cấp số nhân 108
- Câu hỏi và bài tập ôn tập chương III 116

Chương IV. GIỚI HẠN

- A. Giới hạn của dãy số 122
  - §1. Dãy số có giới hạn 0 122
  - §2. Dãy số có giới hạn hữu hạn 125
  - §3. Dãy số có giới hạn vô cực 129
- B. Giới hạn của hàm số. Hàm số liên tục 135
  - §4. Định nghĩa và một số định lí về giới hạn của hàm số 135
  - §5. Giới hạn một bên 139
  - §6. Một vài qui tắc tìm giới hạn vô cực 145
  - §7. Các dạng vô định 148
  - §8. Hàm số liên tục 153
- Câu hỏi và bài tập ôn tập chương III 160

Chương V. ĐẠO HÀM

§1. Khái niệm đạo hàm 171
§2. Các quy tắc tính đạo hàm 179
§3. Đạo hàm của các hàm số lượng giác 186
§4. Vi phân 194
§5. Đạo hàm cấp cao 196
Câu hỏi và bài tập ôn tập chương V 201
Câu hỏi và bài tập ôn tập cuối năm 207

GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11
(Chương trình nâng cao)

Nguyễn Văn Lộc (Chủ biên)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: (04) 39714896; (04) 39724770; Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Chịu trách nhiệm nội dung
Biên tập: PHAN HẢI NHƯ
Trình bày bìa: QUỐC VIỆT

Đối tác liên kết xuất bản:

CÔNG TY SÁCH - THIẾT BỊ GIÁO DỤC ĐỨC TRÍ

Mã số 1L-93 ĐH2009
In 3.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Công ty In Hưng Phú
Số xuất bản: 345-2009/CXB/46-54/ĐHQGHN, ngày 24/4/2009
Quyết định xuất bản số: 93 LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2009.